Problema 707.-

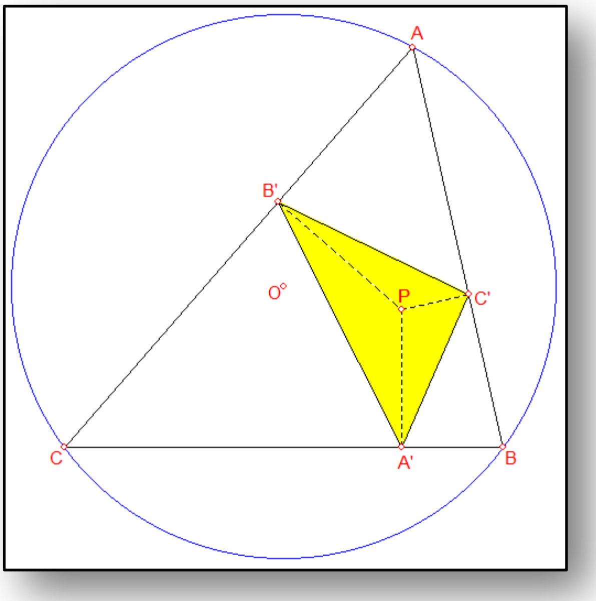
Dado un triángulo ABC, ¿dónde están situados los puntos para los que coincide el área de su triángulo pedal con el órtico de ABC?

Propuesto por César Beade Franco, I. E. S. Fernando Blanco, Cee, A Coruña.
Comunicación personal. (2014)

Johnson, R. A. (1960) Advanced Euclidean Geometry. An Elementary Treatise on the Geometry of the Triangle and the Circle 198, p. 139

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Consideramos el triángulo ABC y su circunferencia circunscrita de centro O y radio R. Siendo P, punto interior a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, construimos su triángulo pedal A'B'C'.



Como los cuadriláteros PA'B'C, PA'C'B y PB'C'A son concíclicos, aplicando el Teorema de los Senos a cada uno de ellos, se verifica que:

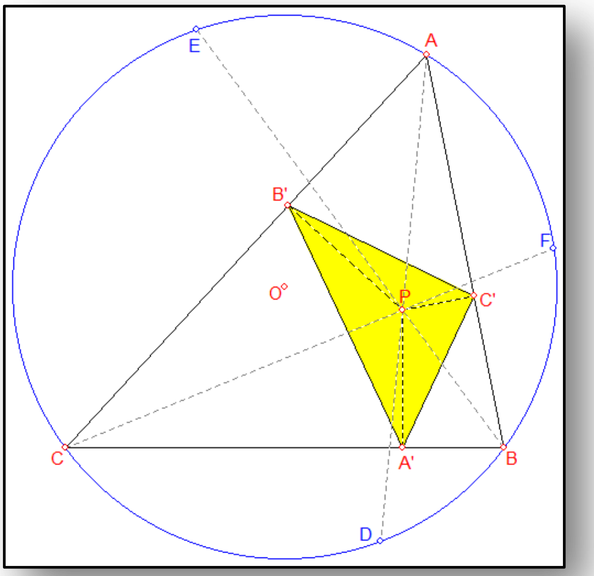
$$\frac{A'B'}{senC} = PC; \quad \frac{A'C'}{senB} = PB; \quad \frac{B'C'}{senA} = PA$$

Por tanto:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{PC.senC}{AB} = \frac{PC}{2R};$$

Análogamente:

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{PB}{2R}; \quad \frac{B'C'}{BC} = \frac{PA}{2R}$$



Por otro lado, si trazamos las cevianas que pasan por el punto P, obtenemos sobre la circunferencia circunscrita los puntos D, E y F.

$$\angle B'A'C' = \angle B'A'P + \angle PA'C'$$

$$\angle B'A'C' = \angle PCA + \angle PBC'$$

$$\angle B'A'C' = \angle ADF + \angle ADE = \angle EDF$$

De igual manera, llegaríamos a obtener:

$$\angle A'C'B' = \angle DFE$$

$$\angle B'A'C' = \angle EDF$$

Así tenemos que el triángulo A'B'C' es semejante al DEF. Por tanto $\frac{A'B'}{DE} = \frac{R'}{R}$, siendo R' el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo A'B'C'.

Por otro lado, se dan las semejanzas entre los siguientes triángulos:

$$PAB \approx PDE \rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{PB}{PD} = \frac{PA}{PE}$$
$$PBC \approx PEF \rightarrow \frac{BC}{EF} = \frac{PB}{PF} = \frac{PC}{PE}$$
$$PCA \approx PDF \rightarrow \frac{AC}{DE} = \frac{PA}{PE} = \frac{PC}{PF}$$

Se verificarán las siguientes relaciones entre las áreas de los triángulos A'B'C' y ABC:

$$[A'B'C'] = \frac{A'B'.B'C'.C'A'}{4.R'}$$
$$[ABC] = \frac{AB.BC.CA}{4.R}$$
$$\frac{[A'B'C']}{[ABC]} = \frac{R}{R'}\frac{A'B'.B'C'.C'A'}{AB.BC.CA} = \frac{DE}{A'B'}\frac{A'B'.B'C'.C'A'}{AB.BC.CA} = \frac{DE}{AB}\frac{B'C'.C'A'}{BC.CA} = \frac{DE}{AB}\frac{PA.PB}{2R.2R} = \frac{PD}{PB}\frac{PA.PB}{2R.2R}$$
$$\frac{[A'B'C']}{[ABC]} = \frac{PD.PA}{4R^2} = (*)\frac{R^2 - PD^2}{4R^2} \Rightarrow \quad [A'B'C'] = \frac{R^2 - PD^2}{4R^2}.[ABC]$$

(*) Hemos supuesto que el punto P era interior a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

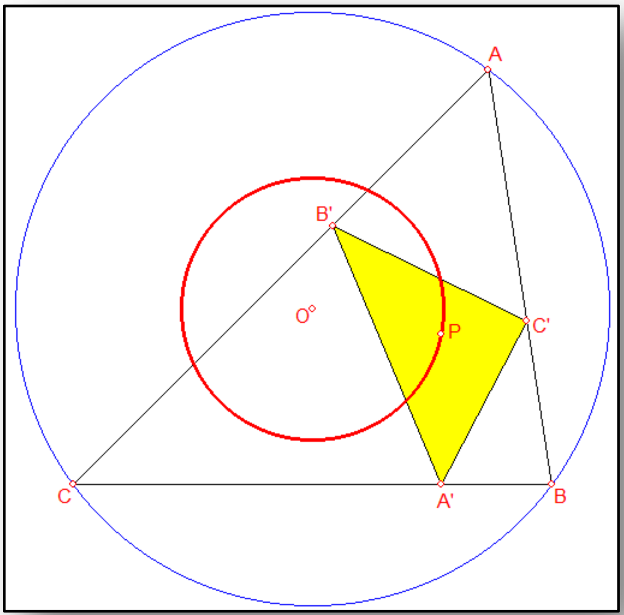
Conclusión:

En definitiva, el valor del área del Triángulo Pedal de un punto P es igual para todos aquellos puntos que estén situados en la circunferencia de centro el Circuncentro del triángulo inicial ABC y de radio OP.

Solución:

Por tanto, para nuestro propósito, el lugar geométrico solicitado será la **circunferencia de centro el Circuncentro y que pasa por el Ortocentro**, ya que, como es sabido, **el triángulo pedal del Ortocentro es el triángulo órtico**.

Conclusión:



Solución: