

Propuesto por César Beade Franco, I. E. S. Fernando Blanco, Cee, A Coruña.

Problema 707

Dado un triángulo ABC, ¿dónde están situados los puntos para los que coincide el área de su triángulo pedal con el órtico de ABC?

Beade, C. (2014): Comunicación personal.

Johnson, R. A. (1960) Advanced Euclidean Geometry. An Elementary Treatise on the Geometry of the Triangle and the Circle 198, p. 139

Solución de Fabiola Czwienckez, profesora de Matemática (jubilada). Turmero, Venezuela.

Tenemos un triángulo ABC. Debemos hallar el lugar geométrico determinado por los puntos del plano para los cuales el área de los respectivos triángulos pedales coincide con el área del triángulo órtico de ABC.

Sin pérdida de generalidad, establezcamos un sistema de coordenadas rectangulares de modo que las coordenadas de los vértices A, B y C sean $(m, 0)$, $(n, 0)$ y $(0,1)$, respectivamente, con $m < n$ (figura 1). Esta elección del sistema de coordenadas permite determinar, con relativa facilidad, las coordenadas de los pies de las proyecciones ortogonales de un punto P del plano sobre las rectas que contienen los lados del triángulo.

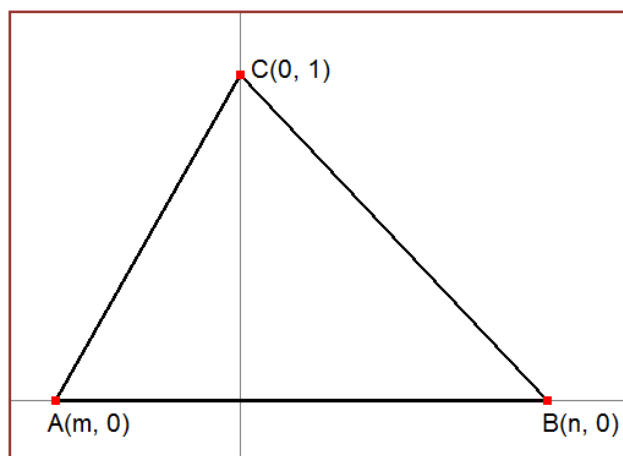


Figura 1

Nótese que ABC no puede ser un triángulo rectángulo (recordemos que si un triángulo es rectángulo, el triángulo órtico se degenera en un segmento). Por tanto, ninguno de los tres ángulos internos de ABC puede ser recto. Ahora bien, es evidente que el ángulo en A es recto si, y sólo si, $m = 0$. También, el ángulo en B es recto si, y sólo si, $n = 0$. Pero, ¿qué pasa con el ángulo en C ? Nótese que las pendientes de las rectas $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ son, respectivamente, $\frac{-1}{m}$ y $\frac{-1}{n}$. El ángulo en C es recto si, y sólo si, $\frac{1}{mn} = -1$. Es decir, si y sólo si, $mn + 1 = 0$. En consecuencia, debemos considerar las siguientes restricciones:

- $m \neq 0$
- $n \neq 0$
- $mn + 1 \neq 0$

Sea P un punto del plano del triángulo ABC . Supongamos que sus coordenadas en el sistema rectangular establecido son (h, k) . Determinemos las coordenadas de los pies de las perpendiculares trazadas desde P a las rectas que contienen a los lados del triángulo dado.

Las ecuaciones de las rectas que contienen los lados del triángulo son:

$$\overleftrightarrow{AB} : y = 0 \qquad \overleftrightarrow{AC} : y = \frac{-1}{m}(x - m) \quad (1) \qquad \overleftrightarrow{BC} : y = \frac{-1}{n}(x - n) \quad (2)$$

El pie de la perpendicular desde $P(h, k)$ a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ es $D(h, 0)$.

¿Cuáles son las coordenadas del punto E , pie de la perpendicular desde P a $\overleftrightarrow{AC}$?

La ecuación de la recta que pasa por $P(h, k)$ y es perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$ es

$$L_1 : y - k = m(x - h) \quad (3)$$

Determinemos la intersección de L_1 y $\overleftrightarrow{AC}$. De (1) y (3),

$$\begin{aligned} \frac{-1}{m}(x - m) - k &= m(x - h) \Rightarrow \frac{-1}{m}x + 1 - k = mx - mh \Rightarrow \frac{m^2 + 1}{m}x = mh - k + 1 \\ \Rightarrow x &= \frac{m^2h - mk + m}{m^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Luego, } y = \frac{-1}{m}(x - m) = \frac{-1}{m} \left(\frac{m^2 h - mk + m}{m^2 + 1} - m \right) = \frac{-mh + k - 1}{m^2 + 1} + 1 = \frac{-mh + k - 1 + m^2 + 1}{m^2 + 1}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-mh + k + m^2}{m^2 + 1}$$

Así, el pie de la perpendicular desde $P(h, k)$ a $\overleftrightarrow{AC}$ es el punto

$$E \left(\frac{m^2 h - mk + m}{m^2 + 1}, \frac{-mh + k + m^2}{m^2 + 1} \right)$$

¿Cuáles son las coordenadas del punto F , pie de la perpendicular desde P a $\overleftrightarrow{BC}$?

La ecuación de la recta que pasa por $P(h, k)$ y es perpendicular a $\overleftrightarrow{BC}$ es

$$L_2 : y - k = n(x - h) \quad (4)$$

Determinemos la intersección de L_2 y $\overleftrightarrow{BC}$. De (2) y (4),

$$\frac{-1}{n}(x - n) - k = n(x - h) \Rightarrow \frac{-1}{n}x + 1 - k = nx - nh \Rightarrow \frac{n^2 + 1}{n}x = nh - k + 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{n^2 h - nk + n}{n^2 + 1}$$

$$\text{Luego, } y = \frac{-1}{n}(x - n) = \frac{-1}{n} \left(\frac{n^2 h - nk + n}{n^2 + 1} - n \right) = \frac{-nh + k - 1}{n^2 + 1} + 1 = \frac{-nh + k - 1 + n^2 + 1}{n^2 + 1}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-nh + k + n^2}{n^2 + 1}$$

Así, el pie de la perpendicular desde $P(h, k)$ a $\overleftrightarrow{BC}$ es el punto

$$F \left(\frac{n^2 h - nk + n}{n^2 + 1}, \frac{-nh + k + n^2}{n^2 + 1} \right)$$

El triángulo DEF es el triángulo pedal del punto P respecto al triángulo ABC . En la figura 2 vemos un punto P y su respectivo triángulo pedal DEF .

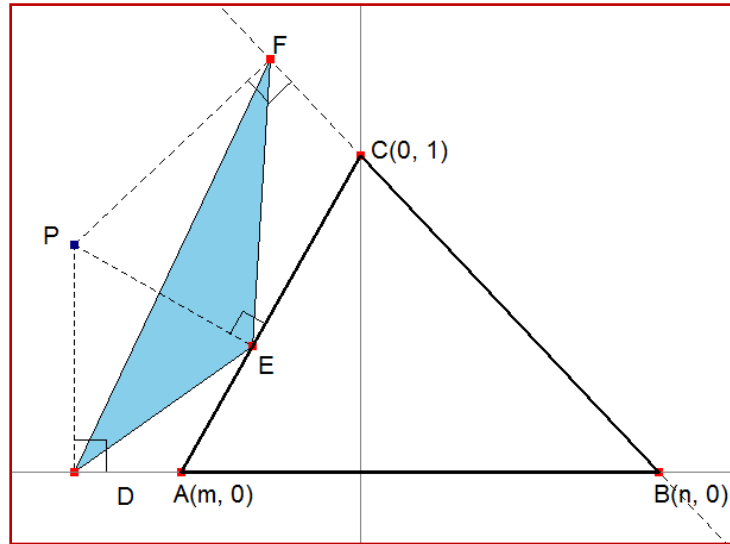


Figura 2

Ahora bien, el triángulo órtico del triángulo ABC es el triángulo pedal de su ortocentro y sus vértices se denotan por H_A , H_B y H_C , según dichos vértices se encuentren en las rectas $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$, respectivamente. En nuestro caso, las coordenadas del ortocentro de ABC son $(0, -mn)$. Por tanto, haciendo $h = 0$ y $k = -mn$ en las expresiones que definen las coordenadas de los vértices del triángulo pedal del punto $P(h, k)$, obtenemos las coordenadas de los vértices del triángulo órtico de ABC. Son las siguientes:

$$H_A \left(\frac{n(mn+1)}{n^2+1}, \frac{n(n-m)}{n^2+1} \right); \quad H_B \left(\frac{m(mn+1)}{m^2+1}, \frac{m(m-n)}{m^2+1} \right); \quad H_C(0, 0)$$

En la figura 3 se ilustra el triángulo órtico de ABC y el triángulo pedal de un punto P. La pregunta es: ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos P para los cuales el área de los triángulos $H_A H_B H_C$ y DEF son iguales?. Procedamos a determinar las áreas de estos triángulos. Ya que conocemos las coordenadas de sus vértices, aplicaremos determinantes.

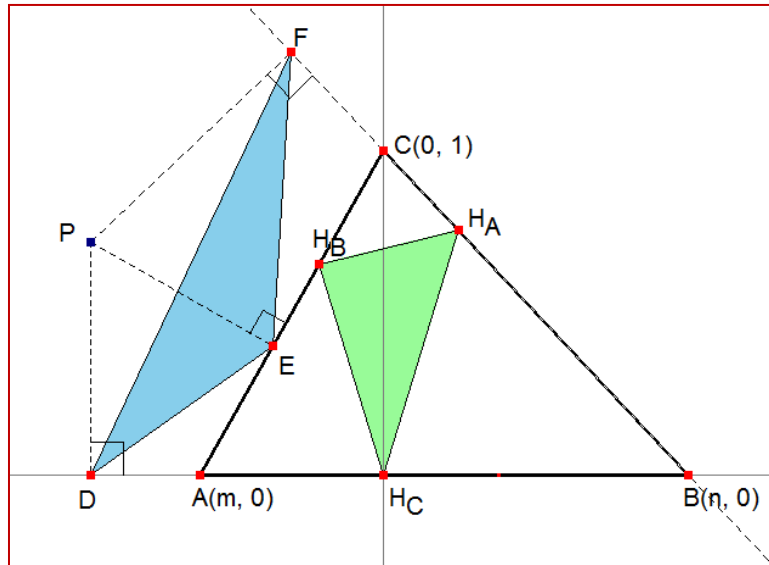


Figura 3

$$\begin{aligned}
 (H_A H_B H_C) &= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \frac{n(mn+1)}{n^2+1} & \frac{n(n-m)}{n^2+1} & 1 \\ \frac{m(mn+1)}{m^2+1} & \frac{m(m-n)}{m^2+1} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right| \\
 &= \frac{1}{2} \left| \frac{mn(mn+1)(m-n)}{(m^2+1)(n^2+1)} - \frac{mn(mn+1)(n-m)}{(m^2+1)(n^2+1)} \right| \\
 &= \frac{1}{2} \left| \frac{mn(mn+1)(m-n)}{(m^2+1)(n^2+1)} + \frac{mn(mn+1)(m-n)}{(m^2+1)(n^2+1)} \right| \\
 &= \frac{1}{2} \left| \frac{2mn(mn+1)(m-n)}{(m^2+1)(n^2+1)} \right| \\
 &= \frac{1}{(m^2+1)(n^2+1)} |mn(mn+1)(m-n)|
 \end{aligned}$$

Como $m^2 + 1 > 0$ y $n^2 + 1 > 0$, tenemos que

$$|m^2 + 1| = m^2 + 1 \quad \text{y} \quad |n^2 + 1| = n^2 + 1$$

Por otra parte, establecimos que $m < n$. Por tanto, $m - n < 0$. Así, $|m - n| = n - m$. Por tanto,

$$(H_A H_B H_C) = \frac{n-m}{(m^2+1)(n^2+1)} |mn(mn+1)| \quad (5)$$

Calculemos, ahora, el área del triángulo DEF.

$$(DEF) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} h & 0 & 1 \\ \frac{m^2 h - mk + m}{m^2 + 1} & \frac{-mh + k + m^2}{m^2 + 1} & 1 \\ \frac{n^2 h - nk + n}{n^2 + 1} & \frac{-nh + k + n^2}{n^2 + 1} & 1 \end{vmatrix}$$

Debido a la extensión de las expresiones al desarrollar el determinante, omitimos los cálculos intermedios y damos el resultado simplificado:

$$(DEF) = \frac{n-m}{2(m^2+1)(n^2+1)} |h^2 + k^2 - (m+n)h - (mn+1)k + mn| \quad (6)$$

Igualando (6) y (5) y simplificando, tenemos que:

$$\frac{1}{2} |h^2 + k^2 - (m+n)h - (mn+1)k + mn| = |mn(mn+1)|$$

$$\text{De donde, } |h^2 + k^2 - (m+n)h - (mn+1)k + mn| = 2|mn(mn+1)| \quad (7)$$

Recordemos que si x y y son números reales, entonces $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \vee x = -y$

Aplicando esta propiedad del valor absoluto en (7), se afirma que

$$|h^2 + k^2 - (m+n)h - (mn+1)k + mn| = 2|mn(mn+1)| \Leftrightarrow$$

$$h^2 + k^2 - (m+n)h - (mn+1)k + mn = 2mn(mn+1) \quad (8)$$

v

$$h^2 + k^2 - (m+n)h - (mn+1)k + mn = -2mn(mn+1) \quad (9)$$

Análisis de la expresión (8)

$$\text{a) } h^2 + k^2 - (m+n)h - (mn+1)k + mn = 2mn(mn+1)$$

$$\Rightarrow h^2 + k^2 - (m+n)h - (mn+1)k = 2m^2n^2 + mn$$

$$\Rightarrow \left[h^2 - (m+n)h + \frac{(m+n)^2}{4} \right] + \left[k^2 - (mn+1)k + \frac{(mn+1)^2}{4} \right] = 2m^2n^2 + mn + \frac{(m+n)^2}{4} + \frac{(mn+1)^2}{4}$$

$$\Rightarrow \left(h - \frac{m+n}{2} \right)^2 + \left(k - \frac{mn+1}{2} \right)^2 = \frac{8m^2n^2 + 4mn + (m+n)^2 + m^2n^2 + 2mn + 1}{4}$$

$$\Rightarrow \left(h - \frac{m+n}{2} \right)^2 + \left(k - \frac{mn+1}{2} \right)^2 = \frac{(m+n)^2 + 9m^2n^2 + 6mn + 1}{4}$$

$$\Rightarrow \left(h - \frac{m+n}{2} \right)^2 + \left(k - \frac{mn+1}{2} \right)^2 = \frac{(m+n)^2 + (3mn+1)^2}{4} \quad (10)$$

Nótese que $\frac{(m+n)^2 + (3mn+1)^2}{4}$ es un número real no negativo, para cualesquiera valores de los números reales m y n . Así que:

a) Si $\frac{(m+n)^2 + (3mn+1)^2}{4} > 0$, entonces (10) es la ecuación de una circunferencia cuyo

centro tiene coordenadas $\left(\frac{m+n}{2}, \frac{mn+1}{2} \right)$ y cuyo radio es $r = \frac{\sqrt{(m+n)^2 + (3mn+1)^2}}{2}$.

Se afirma que el centro de esta circunferencia es el circuncentro del triángulo ABC y que el radio r es la distancia desde el circuncentro al ortocentro.

En efecto, la ecuación de la mediatriz del lado AB del triángulo ABC es $x = \frac{m+n}{2}$ y la ecuación de la mediatriz del lado AC es $y - \frac{1}{2} = m \left(x - \frac{m}{2} \right)$. Hallemos la intersección de estas rectas. Sustituyendo el valor de $x = \frac{m+n}{2}$ en esta última igualdad, tenemos que:

$$y - \frac{1}{2} = m \left(\frac{m+n}{2} - \frac{m}{2} \right) \Rightarrow y = \frac{mn}{2} + \frac{1}{2} = \frac{mn+1}{2}.$$

Probado que las coordenadas del circuncentro son $\left(\frac{m+n}{2}, \frac{mn+1}{2} \right)$ y sabiendo que las del ortocentro son $(0, -mn)$, hallemos la distancia d entre estos puntos.

$$d = \sqrt{\frac{(m+n)^2}{4} + \left(\frac{mn+1}{2} + mn \right)^2} = \sqrt{\frac{(m+n)^2}{4} + \frac{(3mn+1)^2}{4}} = \frac{\sqrt{(m+n)^2 + (3mn+1)^2}}{2} = r$$

b) Si $\frac{(m+n)^2 + (3mn+1)^2}{4} = 0$, entonces el circuncentro y el ortocentro del triángulo ABC coinciden. En cuyo caso, la expresión (10) representa un único punto, a saber, el ortocentro de ABC. Además, el triángulo ABC es equilátero.

Análisis de la expresión (9).

$$h^2 + k^2 - (m+n)h - (mn+1)k + mn = -2mn(mn+1)$$

$$\Rightarrow h^2 + k^2 - (m+n)h - (mn+1)k = -2m^2n^2 - 3mn$$

$$\Rightarrow \left[h^2 - (m+n)h + \frac{(m+n)^2}{4} \right] + \left[k^2 - (mn+1)k + \frac{(mn+1)^2}{4} \right] = -2m^2n^2 - 3mn + \frac{(m+n)^2}{4} + \frac{(mn+1)^2}{4}$$

$$\Rightarrow \left(h - \frac{m+n}{2} \right)^2 + \left(k - \frac{mn+1}{2} \right)^2 = \frac{-8m^2n^2 - 12mn + (m+n)^2 + m^2n^2 + 2mn + 1}{4}$$

$$\Rightarrow \left(h - \frac{m+n}{2} \right)^2 + \left(k - \frac{mn+1}{2} \right)^2 = \frac{(m+n)^2 - 7m^2n^2 - 10mn + 1}{4} \quad (11)$$

En este caso, $\frac{(m+n)^2 - 7m^2n^2 - 10mn + 1}{4}$ puede ser negativo para ciertos valores de m y n. Por ejemplo, si $m = 1$ y $n = 2$, entonces

$$\frac{(m+n)^2 - 7m^2n^2 - 10mn + 1}{4} = \frac{9 - 28 - 20 + 1}{4} = \frac{-38}{4} = \frac{-19}{2}$$

Sin embargo, existen infinitas selecciones de valores para m y n para los cuales la expresión $\frac{(m+n)^2 - 7m^2n^2 - 10mn + 1}{4}$ es un número positivo. Por ejemplo, sea n un real positivo y sea m un número real tal que $-\frac{1}{n} < m < 0$. Nótese que:

$$-\frac{1}{n} < m < 0 \Rightarrow -1 < mn < 0 \quad \text{multiplicando por } n > 0$$

$$\Rightarrow 0 < mn + 1 < 1 \quad (12)$$

Por otra parte, $-\frac{1}{n} < m < 0 \Rightarrow 2 > -2mn > 0$ multiplicando por $-2n < 0$

$$\Rightarrow 0 < -2mn < 2 \quad (13)$$

Multiplicando (12) y (13): $0 < -2mn(mn + 1) < 2 \quad (14)$

$$\text{Además, } -\frac{1}{n} < m < 0 \Rightarrow 1 > -mn > 0 \Rightarrow 0 < -mn < 1 \quad (15)$$

$$\text{Sumando (14) y (15): } 0 < -2mn(mn+1) - mn < 3 \Rightarrow 0 < -2m^2n^2 - 3mn < 3 \quad (16)$$

Lo que importa destacar de (16) es que $-2m^2n^2 - 3mn > 0$, si $n > 0$ y $-\frac{1}{n} < m < 0$.

Como $\frac{(m+n)^2}{4} + \frac{(mn+1)^2}{4} \geq 0$, para cualesquiera reales m y n , podemos afirmar que si $n > 0$ y $-\frac{1}{n} < m < 0$ se cumple que:

$$\begin{aligned} -2m^2n^2 - 3mn + \frac{(m+n)^2}{4} + \frac{(mn+1)^2}{4} &> 0 \\ \Rightarrow \frac{-8m^2n^2 - 12mn + (m+n)^2 + m^2n^2 + 2mn + 1}{4} &> 0 \\ \Rightarrow \frac{(m+n)^2 - 7m^2n^2 - 10mn + 1}{4} &> 0 \end{aligned}$$

Por tanto, si $n > 0$ y $-\frac{1}{n} < m < 0$, la expresión (11) es la ecuación de una circunferencia con centro en $\left(\frac{m+n}{2}, \frac{mn+1}{2}\right)$ (el circuncentro del triángulo ABC) y cuyo radio es $r_1 = \frac{\sqrt{(m+n)^2 - 7m^2n^2 - 10mn + 1}}{2}$.

En resumen, la respuesta a la pregunta: ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos P para los cuales el área de los triángulos $H_A H_B H_C$ y DEF son iguales?, tiene la siguiente respuesta: es la unión de dos circunferencias concéntricas cuyo centro es el circuncentro del triángulo ABC dado y cuyos radios son

$$r = \frac{\sqrt{(m+n)^2 + (3mn+1)^2}}{2} \quad (\text{distancia entre el circuncentro y el ortocentro de ABC})$$

$$r_1 = \frac{\sqrt{(m+n)^2 - 7m^2n^2 - 10mn + 1}}{2} \quad (\text{siempre que } (m+n)^2 - 7m^2n^2 - 10mn + 1 \geq 0)$$

Dos comentarios para finalizar:

1) si el triángulo ABC es equilátero, entonces $m = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ y $n = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

En este caso, $r = 0$ y $r_1 = \frac{\sqrt{0 - \frac{7}{9} + \frac{30}{9} + 1}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{32}{9}}}{2} = \frac{\sqrt{32}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Luego, en general, si un triángulo es equilátero y su altura es H , entonces el lugar geométrico de los puntos para los que coincide el área de su triángulo pedal con el área del triángulo órtico es la unión de dos conjuntos:

- 1) el conjunto unitario, cuyo elemento es el ortocentro
- 2) la circunferencia con centro en el circuncentro y cuyo radio es $r_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3} H$

En la figura 4 se ilustra este caso

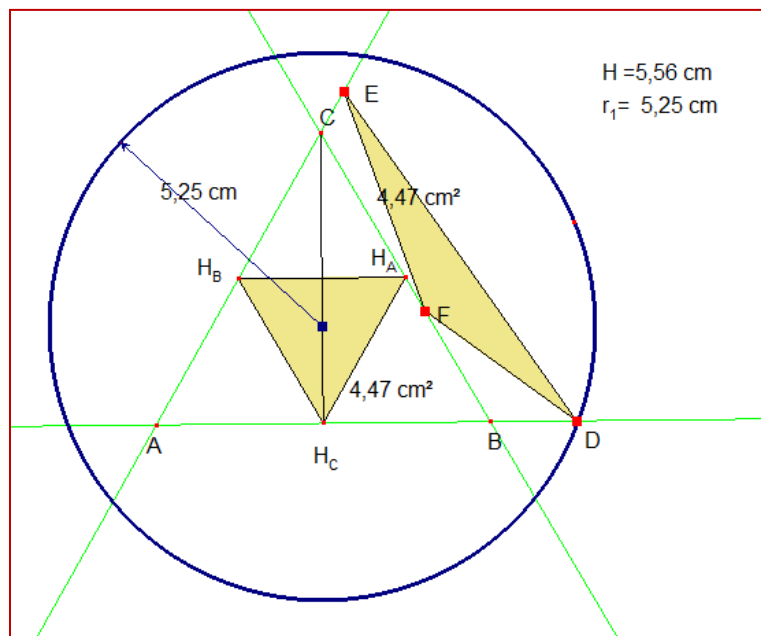


Figura 4

2) En la figura 5, las coordenadas de los vértices del triángulo son $(-9, 0)$, $(3, 0)$ y $(0, 6)$. El triángulo órtico del triángulo está sombreado en verde. En amarillo está sombreado el triángulo pedal del punto P, situado en la circunferencia cuyo radio es la distancia del circuncentro al ortocentro. En azul está sombreado el triángulo pedal del punto Q, situado en la circunferencia cuyo radio fue calculado mediante la expresión (11), habiendo realizado los ajustes respectivos en la escala. Ambas circunferencias tienen su centro en el circuncentro del triángulo.

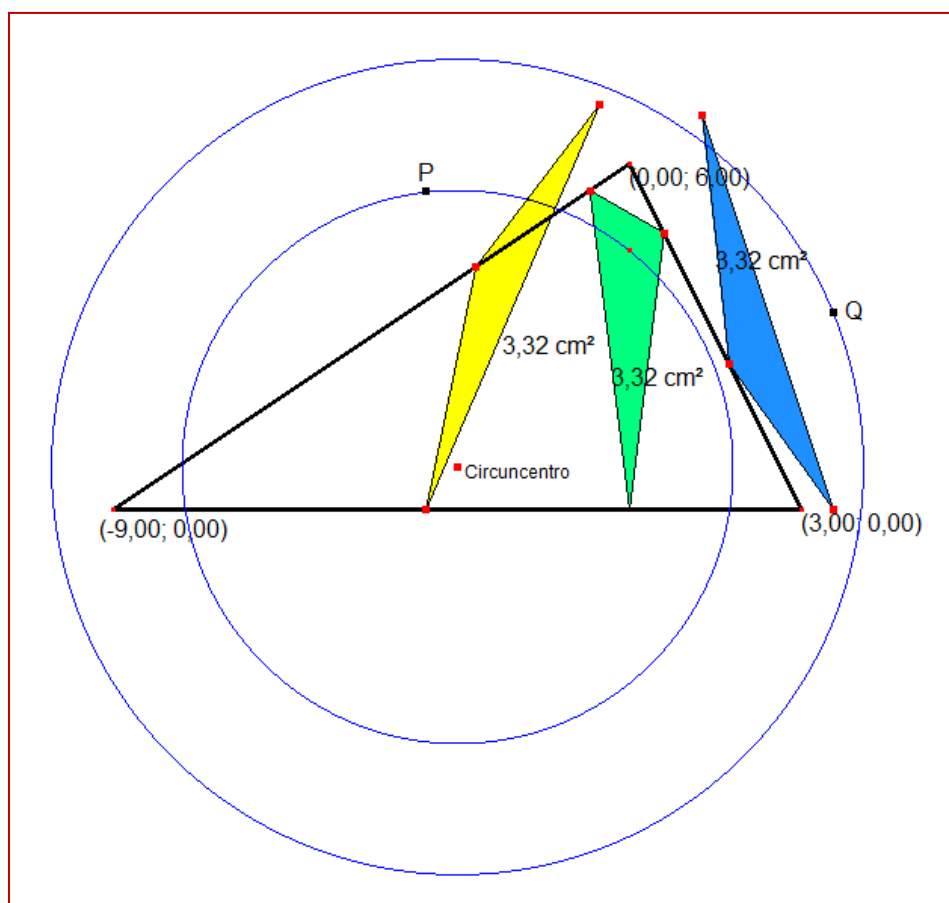


Figura 5