Problema 707 de triánguloscabri. *Dado un triángulo ABC, ¿dónde están situados los puntos para los que coincide el área de su triángulo pedal con el órtico de ABC?*

Propuesto por César Beade Franco.

Solución de Francisco Javier García Capitán

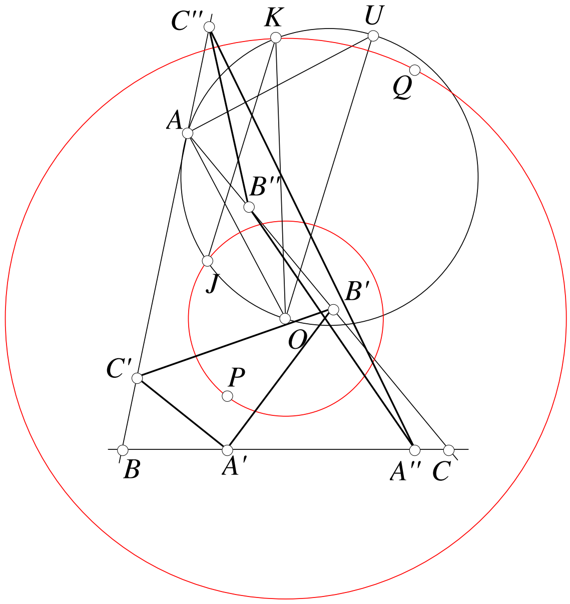
El área $\pi(P)$ del triángulo pedal de un punto P es proporcional a la potencia del punto P respecto de la circunferencia circunscrita (ver Advanced Euclidean Geometry de Roger A. Johnson, §198, p. 139). Concretamente, tenemos la fórmula

$$\pi(P) = \frac{1}{2}\left|R^2 - OP^2\right| \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C = \frac{|R^2 - OP^2|}{4R^2}\Delta,$$

y si Q es cualquier otro punto tendremos

$$\pi(Q) = \pi(P) \Leftrightarrow \left|R^2 - OQ^2\right| = \left|R^2 - OP^2\right| \Leftrightarrow \begin{cases} OQ = OQ \\ OQ^2 = 2R^2 - OP^2 \end{cases},$$

por lo que el triángulo pedal de Q tendrá el mismo área que el triángulo pedal de Q si y solo si Q está en una de dos circuferencias concéntricas centradas en el circuncentro O, una con centro OP, que pasa por P y otra con radio $\sqrt{2R^2 - OP^2}$, que será real solo si $OP \leqslant \sqrt{2}R$.



En la figura hemos construido AU igual y perpendicular a OA, con lo que $OU = \sqrt{2}R$. Luego hemos obtenido J tal que $OJ = OP$ sobre la circunferencia con diámetro OU y K como la segunda intersección de la paralela por J a OU con la circunferencia de diámetro OU.