

Problema 707.

Propuesto por César Beade Franco, I. E. S. Fernando Blanco, Cee, A Coruña.

Dado un triángulo ABC, ¿dónde están situados los puntos para los que coincide el área de su triángulo pedal con el órtico de ABC?

Solution proposée par Philippe Fondanaiche, Paris, France

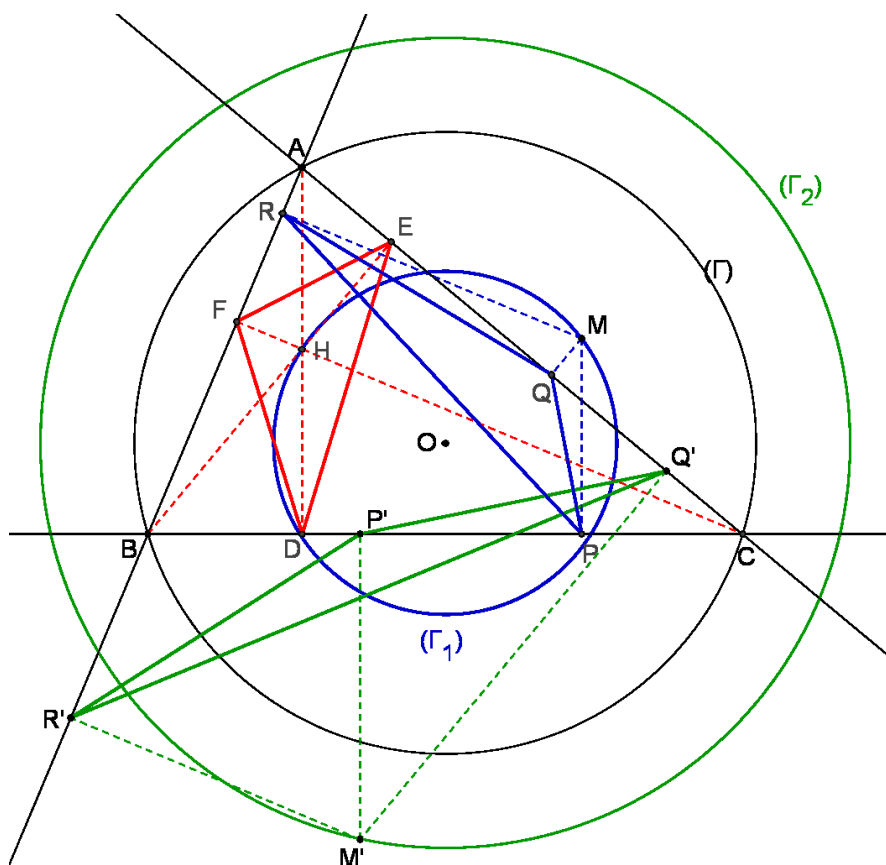
Réponse : H étant l'orthocentre du triangle ABC, le lieu des points M dans un triangle ABC tels que l'aire du triangle pédal associé à ce point est égale à l'aire du triangle orthique est constitué soit de deux cercles concentriques au cercle circonscrit soit d'un seul cercle selon la nature du triangle ABC et la position de M par rapport au cercle circonscrit à ABC.

Démonstration

Soient a, b, c les côtés du triangle ABC et α, β et γ les angles aux sommets A, B et C. Le cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC a pour centre O et pour rayon r .

Soit H l'orthocentre du triangle ABC. D, E et F étant les pieds des hauteurs issues de A, B et C, le triangle orthique est DEF.

Soit M un point du plan ABC dont les projections sur les droites BC, CA et AB sont les points P, Q et R. Le triangle PQR est le triangle pédal associé à M.



D'après <http://mathworld.wolfram.com/OrthicTriangle.html> l'aire du triangle orthique DEF est donnée par la formule :

Aire(DEF) = $a.b.c.\text{abs}[\cos(\alpha).\cos(\beta).\cos(\gamma)]/2r$ avec $\text{abs}(X)$ qui désigne la valeur absolue de X .

D'après <http://mathworld.wolfram.com/PedalTriangle.html> ou d'après <http://www.math.uoc.gr/~pamfilos/eGallery/problems/AreaOfPedal.html> l'aire du triangle pédal est donnée par des formules variables selon la nature du triangle ABC et la position de M par rapport au cercle (Γ) :

1) le triangle ABC est acutangle

1-1) M est intérieur au cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC

On a la relation : $\text{aire}(PQR) = (r^2 - OM^2).\sin(\alpha).\sin(\beta).\sin(\gamma)/2$

Les aires des deux triangles DEF et PQR sont égales si et seulement si :

$$(r^2 - OM^2).\sin(\alpha).\sin(\beta).\sin(\gamma) = a.b.c.\text{abs}[\cos(\alpha).\cos(\beta).\cos(\gamma)]/r,$$

ce qui donne $OM^2 = r^2 - a.b.c.\cot(\alpha).\cot(\beta).\cot(\gamma)/r$ qui s'écrit encore

$$OM^2 = \frac{a^2}{4\sin^2(\alpha)} [1 + 8\cos(\alpha).\cos(\beta).\cos(\gamma)]. \text{ Le deuxième membre est toujours } > 0,$$

quels que soient les angles α, β et γ d'un triangle acutangle.

Cette expression peut s'exprimer aussi avec les seules dimensions a, b et c des côtés du triangle et l'on obtient :

$$OM^2 = \frac{a^2b^2c^2}{16S^2} - \frac{S.(b^2 + c^2 - a^2).(c^2 + a^2 - b^2).(a^2 + b^2 - c^2)}{2a^2b^2c^2} \text{ où } S \text{ est l'aire du}$$

triangle ABC = $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (formule de Héron) où $s = (a + b + c)/2$

Il en résulte que pour un triangle ABC donné, OM est une constante et l'ensemble des points M qui rendent l'aire du triangle pédal égal à l'aire du triangle orthique est le cercle de centre O et de rayon

$$r_1 = \frac{a}{2\sin(\alpha)} \cdot \sqrt{1 + 8\cos(\alpha).\cos(\beta).\cos(\gamma)}. \text{ Comme ce cercle passe évidemment par}$$

l'orthocentre H du triangle ABC quand M est confondu avec H, le lieu de M est donc le cercle (Γ_1) de centre O et de rayon OH.

1-2) M est extérieur au cercle circonscrit (Γ) au triangle ABC.

On désigne par M' le point courant qui se projette en P', Q' et R' sur BC, CA et AB. Dès lors l'aire du triangle pédal est donnée par la formule :

$$\text{aire}(P'Q'R') = (OM'^2 - r^2).\sin(\alpha).\sin(\beta).\sin(\gamma)/2.$$

D'où l'équation $OM'^2 = r^2 + a.b.c.\cot(\alpha).\cot(\beta).\cot(\gamma)/r$.

Le lieu de M' est alors le cercle (Γ_2) concentrique au cercle (Γ) et de rayon

$$r_2 = \frac{a}{2\sin(\alpha)} \sqrt{1 - 8\cos(\alpha).\cos(\beta).\cos(\gamma)}.$$

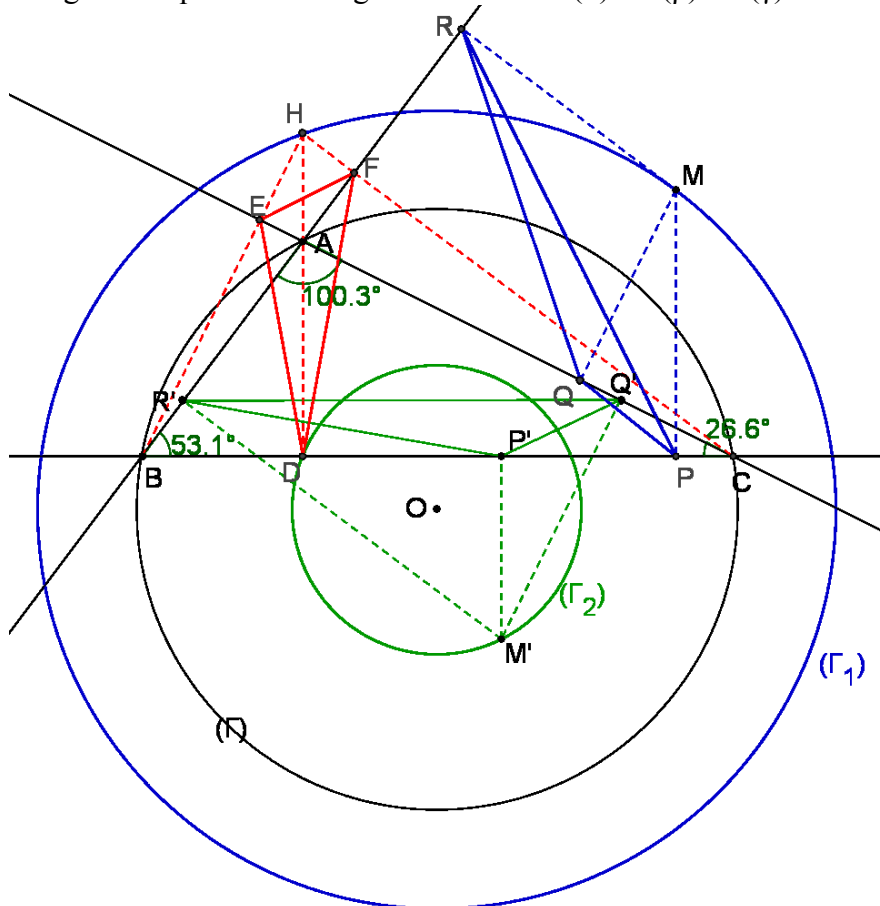
On vérifie qu'avec un triangle acutangle, la quantité $1 - 8\cos(\alpha).\cos(\beta).\cos(\gamma)$ est bien toujours ≥ 0 et s'annule quand le triangle ABC est équilatéral.

2) le triangle ABC est rectangle en A.

Le triangle orthique confondu avec le point A a une aire nulle. Le point M décrit alors le cercle (Γ) de sorte que les trois points P,Q,R sont alignés sur la droite de Simson qui lui est associée. au point M.

3) le triangle ABC est obtusangle en A.

L'orthocentre H du triangle ABC est extérieur au cercle (Γ) et $\cos(\alpha) < 0$. L'aire du triangle orthique est donc égale à $-a.b.c.\cos(\alpha).\cos(\beta).\cos(\gamma)/2r$.



3-1) M est extérieur au cercle circonscrit (Γ) au triangle ABC

On a $OM^2 - r^2 = -a.b.c.\cot(\alpha).\cot(\beta).\cot(\gamma)/r$.

Le lieu de M est alors le cercle (Γ_1) de centre O et de rayon

$$r_1 = \frac{a}{2\sin(\alpha)} \cdot \sqrt{1 - 8\cos(\alpha).\cos(\beta).\cos(\gamma)} \text{ avec la quantité } 1 - 8\cos(\alpha).\cos(\beta).\cos(\gamma)$$

qui est toujours ≥ 0 .

3-2) M est intérieur au cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC

L'aire du triangle pédal est de la forme $(r^2 - OM^2).\sin(\alpha).\sin(\beta).\sin(\gamma)/2$.

Il en découle $OM^2 = r^2 + a.b.c.\cot(\alpha).\cot(\beta).\cot(\gamma)/r$

$$\text{ou encore } OM^2 = \frac{a^2}{4\sin^2(\alpha)} [1 + 8\cos(\alpha).\cos(\beta).\cos(\gamma)] .$$

Le deuxième membre est défini pour $1 + 8\cos(\alpha).\cos(\beta).\cos(\gamma) \geq 0$

Comme $\alpha = \pi - \beta - \gamma$, l'inégalité s'écrit $1 - 8\cos(\beta + \gamma).\cos(\beta).\cos(\gamma) \geq 0$.

Soient x et y les coordonnées du sommet A dans un repère orthonormé avec $BC = a$, $\text{angle}(ABC) = \beta$ et $\text{angle}(ACB) = \gamma$.

On a $\tan(\beta) = y/x$ et $\tan(\gamma) = y/(a - x)$, ce qui permet d'exprimer l'inégalité ci-dessus en fonction de x et de y .

On obtient ainsi l'existence du cercle (Γ_2) si:

$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2ax + a) \geq 8x(a - x)(ax - x^2 - y^2)$, c'est à dire si A se trouve au dessus de la courbe rouge du 4^{ème} degré dont le tracé est donné ci-après:

