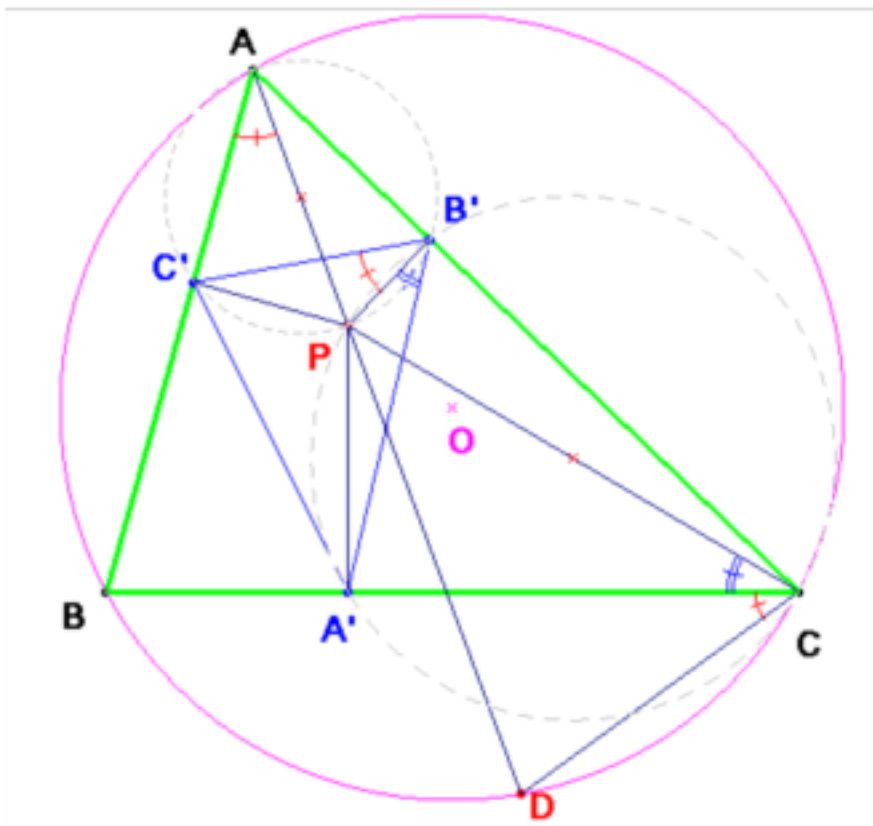


Problema 707.- Dado un triángulo ABC , ¿dónde están situados los puntos para los que coincide el área de su triángulo pedal con el órtico de ABC ?

Beade, C. (2014): Comunicación personal.

Johnson, R. A. (1960) Advanced Euclidean Geometry. An Elementary Treatise on the Geometry of the Triangle and the Circle 198, p. 139.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Sea P un punto del plano no situado sobre los lados del triángulo ABC . Vamos a llamar a', b', c' a los lados del triángulo pedal de P que se oponen a los vértices A, B y C respectivamente.

El t. de los senos para $AC'B'$, inscrito en una circunferencia de diámetro AP nos da

$$\frac{a'}{\sin(A)} = PA.$$

De donde $a' = AP \cdot \sin(A)$ y análogamente los otros lados.

En el cuadrilátero cíclico $CA'PB'$ se tiene $\angle A'CP = \angle A'B'P$, y en $AC'PB'$, $\angle PB'C' = \angle PAC' = \angle DCB$. Con todo esto $\angle A'B'C' = \angle DCP$.

Aplicando el teorema de los senos al triángulo PDC , tenemos

$$\frac{DP}{CP} = \frac{\sin(DCP)}{\sin(PDC)} = \frac{\sin(A'B'C')}{\sin(B)}, \text{ de donde } \sin(A'B'C') = \sin(B') = \frac{DP}{CP} \sin(B).$$

El área del triángulo pedal es

$$\begin{aligned} \text{Área}_{\text{pedal}} &= \frac{1}{2} \cdot a' c' \sin(B') = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot CP \cdot \sin(A) \cdot \sin(C) \cdot \sin(B) \cdot \frac{DP}{CP} \\ &= \frac{1}{2} \cdot AP \cdot DP \cdot \sin(A) \cdot \sin(B) \cdot \sin(C). \end{aligned}$$

$AP \cdot DP$ es, salvo quizá el signo, la potencia de P respecto de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC , o sea, $AP \cdot DP = R^2 - OP^2$, siendo R el radio de ésta última y O , su centro.

Uniendo todo tenemos: $\text{Área}_{\text{pedal}} = \frac{1}{2} \cdot (R^2 - OP^2) \cdot \sin(A) \cdot \sin(B) \cdot \sin(C)$.

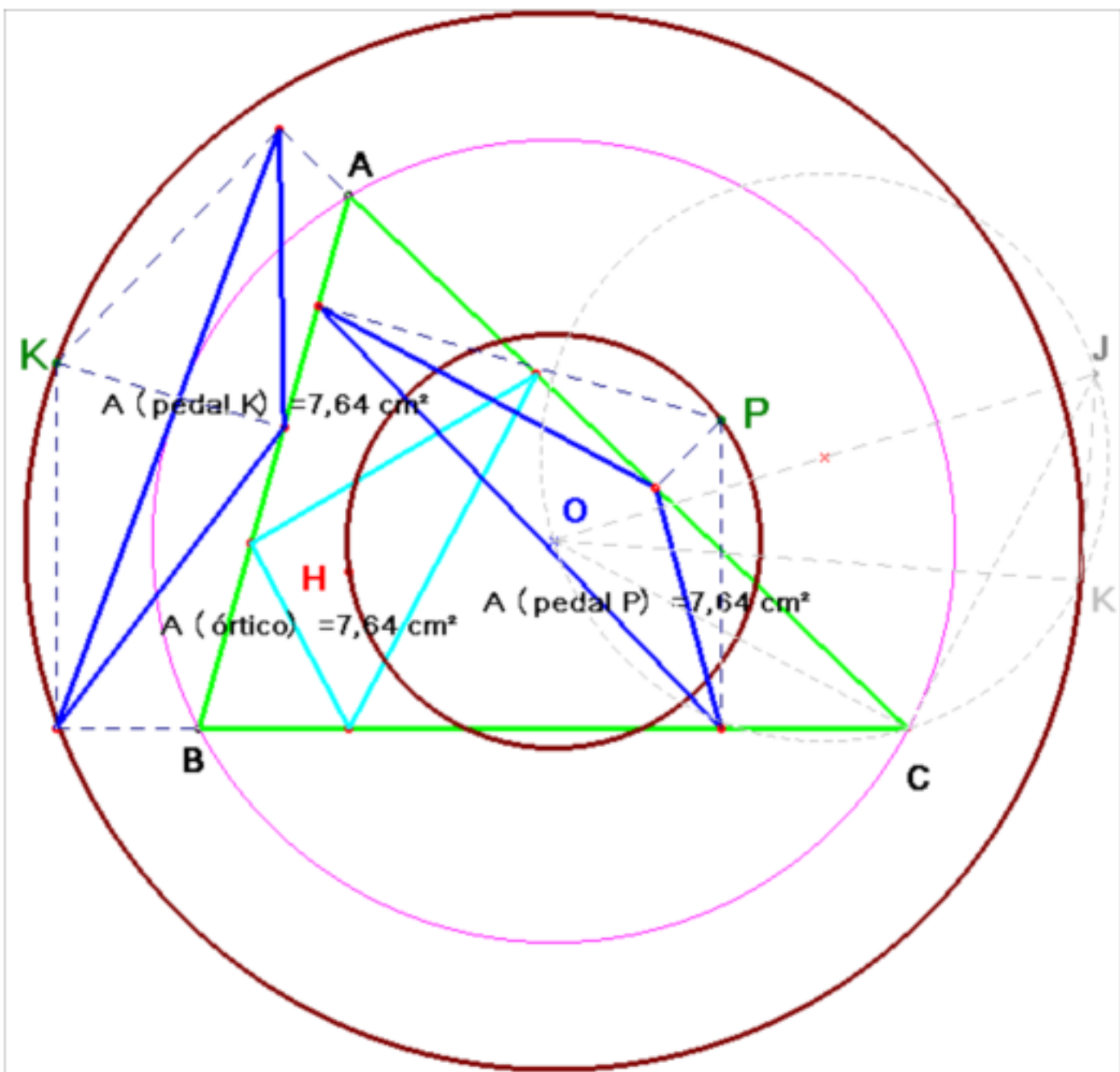
El área del triángulo ABC es $\text{Área}_{ABC} = \frac{1}{2} bcsen(A) = 2R^2 \sin(A) \cdot \sin(B) \cdot \sin(C)$, de donde sustituyendo el producto de los senos, resulta

$$\text{Área}_{\text{pedal}} = \frac{(R^2 - OP^2)}{4R^2} \cdot \text{Área}_{ABC}$$

Todos los triángulos pedales para los cuales OP^2 tenga un valor constante, tienen igual área. Esto ocurre cuando el punto P se mueve sobre una circunferencia con centro en el circuncentro.

Cuando P está situado sobre la circunscrita, el valor de la potencia es cero y el área también. Es el caso en que el triángulo pedal degenera en una recta: la recta de Wallace.

El triángulo órtico de un triángulo dado es el triángulo pedal del ortocentro. Por tanto, los puntos de una circunferencia de centro O y radio OH tienen todos igual área: la del triángulo órtico.



Si un punto K está fuera de la circunscrita subsiste el cálculo anterior del área del triángulo pedal. Ahora el valor de la potencia es $OK^2 - R^2$, y los triángulos pedales con igual área que el órtico serán aquellos para los cuales se verifica $OK^2 - R^2 = R^2 - OH^2$, $OK^2 = 2R^2 - OH^2$. Se trata de una circunferencia de centro O y radio OK , que es fácil de construir, como se muestra en la figura.

Los puntos para los que coincide el área de su triángulo pedal con el órtico se encuentran en dos circunferencias de centro O y radios OH y $OK = \sqrt{2R^2 - OH^2}$ respectivamente. ■