Problema 708.-

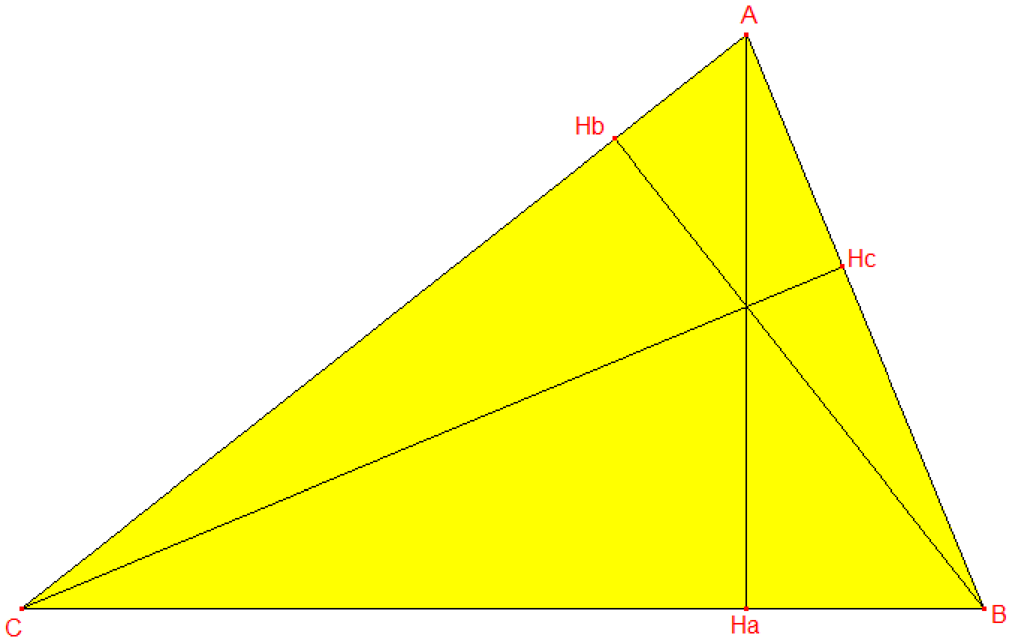
Calcular los tres lados de un triángulo, cuando se conocen los volúmenes que engendra este triángulo, al girar sucesivamente alrededor de cada uno de dichos lados.

Propuesto por Ricard Peiró i Estruch, Profesor de Matemáticas del IES "Abastos" (Valencia)

Ruiz, A. (1925) "Elementos de GEOMETRÍA". Zaragoza.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Supongamos en todo el desarrollo siguiente que el triángulo dado ABC es acutángulo y, por tanto, las tres alturas son interiores al triángulo dado. Consideramos pues, el triángulo ABC y trazamos sus respectivas alturas



$h_a = AH_a$, $h_b = AH_b$ y $h_c = AH_c$.

De esta forma, las figuras que generan el triángulo ABC al girar sobre cada uno de sus lados son, para cada caso, conos unidos por sus bases. En concreto, si nos fijamos en el lado a=BC, tendríamos que la figura resultante estaría formada por dos conos unidos por la circunferencia de centro H_a y de radio h_a, siendo sus alturas CH_a y BH_a, respectivamente.

Por tanto, la suma del volumen de estos dos conos sería el siguiente $V_a = \dfrac{\pi h_a^2 a}{3}$.

De igual manera, tendríamos $V_b = \dfrac{\pi h_b^2 b}{3}$; $V_c = \dfrac{\pi h_c^2 c}{3}$.

Como el área S= [ABC] del triángulo viene dado por $[ABC] = \dfrac{h_a a}{2} = \dfrac{h_b b}{2} = \dfrac{h_c c}{2}$, resultará que

$$V_a = \frac{2S\pi h_a}{3};\ V_b = \frac{2S\pi h_b}{3}; V_c = \frac{2S\pi h_c}{3}$$

$$\frac{h_a}{V_a} = \frac{h_b}{V_b} = \frac{h_c}{V_c} = \frac{3}{2\pi S}$$

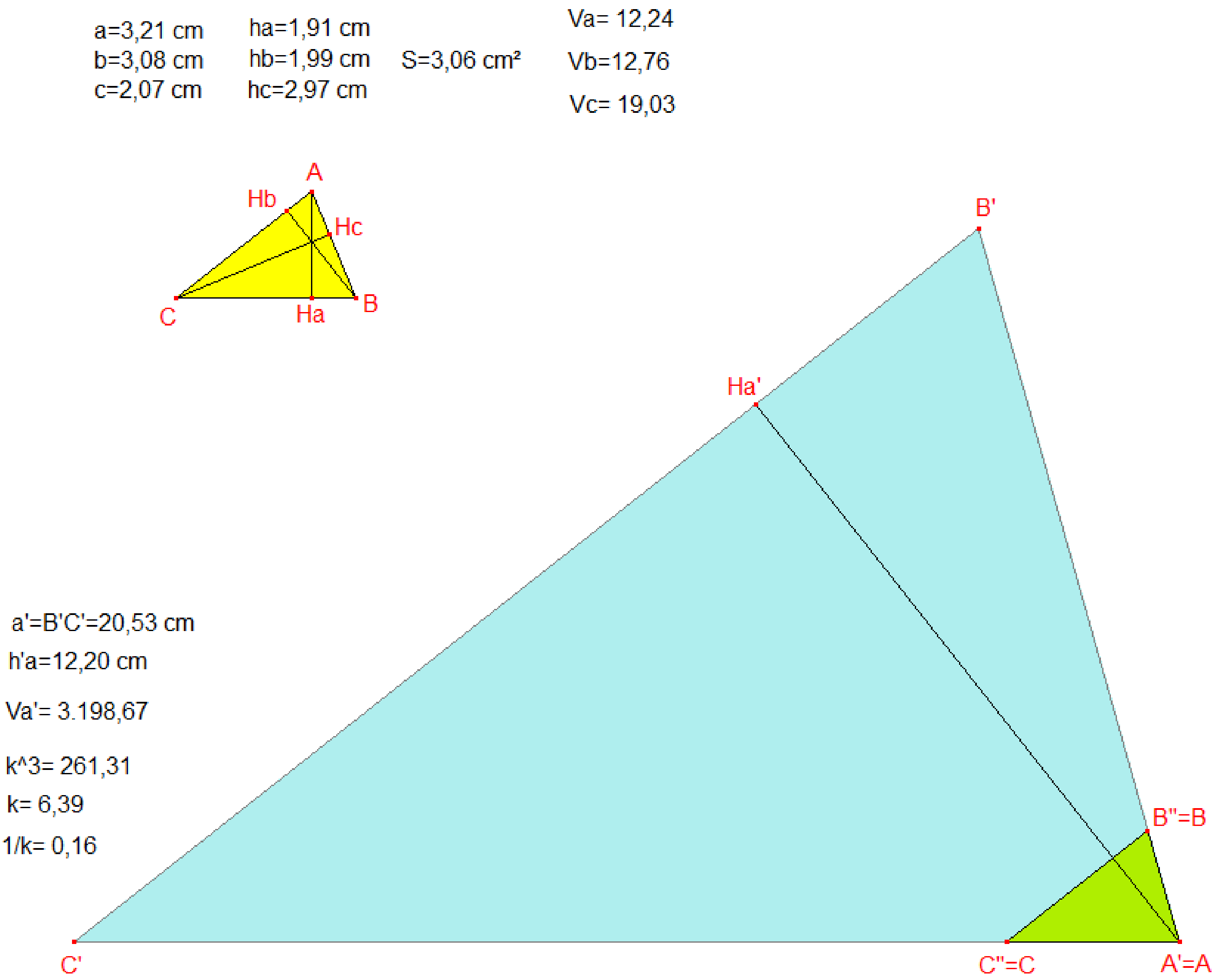
En definitiva, las respectivas alturas del triángulo ABC son proporcionales a los valores de V_a, V_b y V_c.

Podemos pues, construir un triángulo A'B'C', semejante al inicial y de alturas $h'_a = V_a$, $h'_b = V_b$ y $h'_c = V_c$. (*)

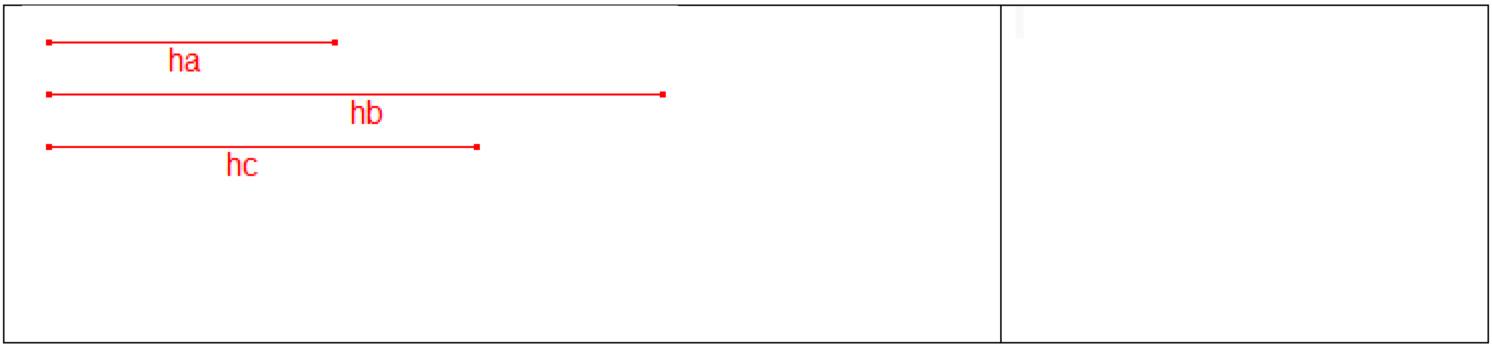
Una vez construido este triángulo A'B'C', semejante al inicial, ABC, hallamos ahora alguno de sus volúmenes asociados. Por ejemplo el asociado al lado a'=BC'.

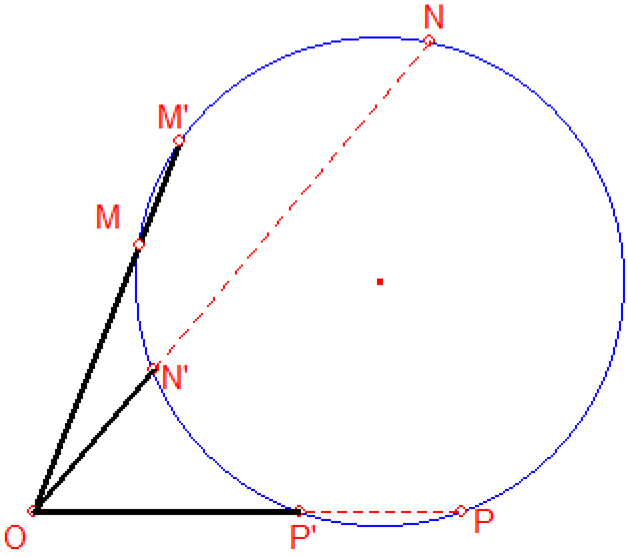
$$\frac{V_a'}{V_a} = K^3 \Rightarrow K = \sqrt[3]{\frac{V_a'}{V_a}}$$

De esta forma, podemos construir el triángulo ABC con una homotecia de centro A’ y razón $\frac{1}{K}=\sqrt[3]{\frac{V_a}{V_a'}}$.
Este proceso de construcción se sigue en el siguiente desarrollo:



(*) Construir un triángulo conocidas sus tres alturas h_a, h_b y h_c.





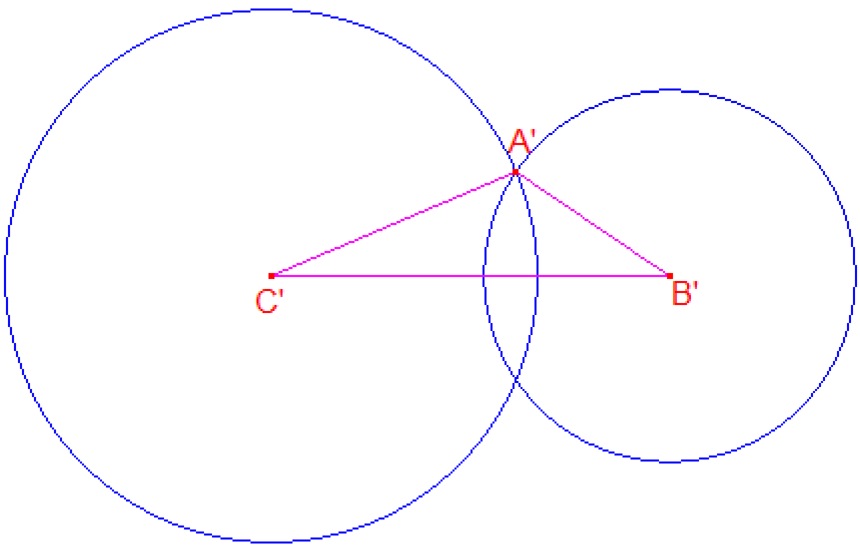
1.- Con origen común en un punto cualquiera O se trazan tres segmentos en direcciones arbitrarias, de longitudes respectivamente iguales a las tres alturas.

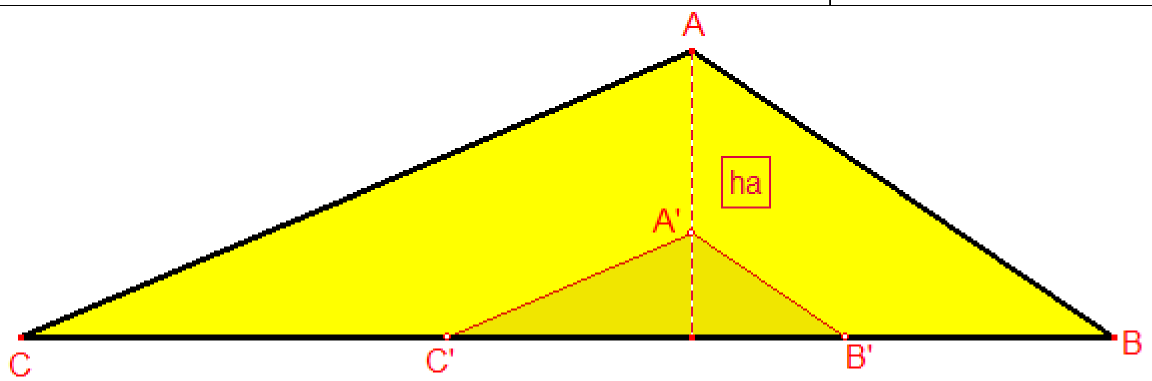
2 - Haciendo pasar una circunferencia por sus extremos libres M, N y P.

3 - Esta circunferencia corta a los segmentos tomados, o sus prolongaciones, en los puntos M’, N’ y P’.

4 - Con lados iguales a las longitudes OM’, ON’ y OP’ se construye un triángulo A’B’C’, que es semejante al pedido.

B'C'=OM'; C'A'=ON'; A'B'=OP'





Para obtener el definitivo resultado basta trazar una de las alturas dadas, ha, sobre la altura que pasa por el vértice A’, para así determinar el vértice A, punto por el cual se trazan las paralelas a los lados del triángulo auxiliar previamente obtenido, determinando así el triángulo ABC.