

# Problema 708

74.- Calculeu els tres costats d'un triangle, quan es coneixen els volums que genera aquest triangle, al girar successivament al voltant de cadascun dels seus costats.

Ruiz, A. (1925) "Elementos de GEOMETRÍA". Zaragoza.

Solució de Ricard Peiró:

Siga el triangle  $\triangle ABC$  de costats  $a, b, c$  i altures referides a aquests costats  $h_a, h_b, h_c$ .

Siguen  $V_a, V_b, V_c$  els volums dels cossos que genera el triangle al girar al voltant de cadascun dels costats.

El volum d'aquests cossos és igual al volum d'un con de radi l'altura del triangle i altura el costat del triangle respectivament:

$$V_a = \frac{1}{3} \pi h_a^2 \cdot a, \quad V_b = \frac{1}{3} \pi h_b^2 \cdot b, \quad V_c = \frac{1}{3} \pi h_c^2 \cdot c.$$

$$a = \frac{3V_a}{\pi h_a^2}, \quad b = \frac{3V_b}{\pi h_b^2}, \quad c = \frac{3V_c}{\pi h_c^2}.$$

L'àrea del triangle  $\triangle ABC$ :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

$$\frac{1}{2} \frac{3V_a}{\pi h_a^2} h_a = \frac{1}{2} \frac{3V_b}{\pi h_b^2} h_b = \frac{1}{2} \frac{3V_c}{\pi h_c^2} h_c.$$

$$\frac{V_a}{h_a} = \frac{V_b}{h_b} = \frac{V_c}{h_c}.$$

$$aV_a = bV_b = cV_c.$$

$$(a h_a)^2 = \left( \frac{1}{2} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \right)^2. \text{ Elevant al quadrat:}$$

$$4a^2 h_a^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

$$\frac{12V_a}{\pi} a = \left( a + \frac{V_a}{V_b} a + \frac{V_a}{V_c} a \right) \left( -a + \frac{V_a}{V_b} a + \frac{V_a}{V_c} a \right) \left( a - \frac{V_a}{V_b} a + \frac{V_a}{V_c} a \right) \left( a + \frac{V_a}{V_b} a - \frac{V_a}{V_c} a \right).$$

$$\frac{12V_a V_b^4 V_c^4}{\pi} = (V_b V_c + V_a V_c + V_a V_b) (-V_b V_c + V_a V_c + V_a V_b) (V_b V_c - V_a V_c + V_a V_b) (V_b V_c + V_a V_c - V_a V_b) a^3$$

$$a^3 = \frac{12V_a V_b^4 V_c^4}{\pi (V_b V_c + V_a V_c + V_a V_b) (-V_b V_c + V_a V_c + V_a V_b) (V_b V_c - V_a V_c + V_a V_b) (V_b V_c + V_a V_c - V_a V_b)}$$

Anàlogament,

$$b^3 = \frac{12V_b V_a^4 V_c^4}{\pi (V_a V_c + V_b V_c + V_b V_a) (-V_a V_c + V_b V_c + V_b V_a) (V_a V_c - V_b V_c + V_b V_a) (V_a V_c + V_b V_c - V_b V_a)}$$

$$c^3 = \frac{12V_c V_a^4 V_b^4}{\pi (V_a V_b + V_c V_a + V_c V_b) (-V_a V_b + V_c V_a + V_c V_b) (V_a V_b - V_c V_a + V_c V_b) (V_a V_b + V_c V_a - V_c V_b)}$$