

Problema 708

74. Calcular los tres lados de un triángulo, cuando se conocen los volúmenes que engendra este triángulo, al girar sucesivamente alrededor de cada uno de dichos lados.

Ruiz Tapiador, Adoración. "Elementos de GEOMETRÍA". Zaragoza. 1925.

Solución Ricard Peiró i Estruch.

Sea el triángulo $\triangle ABC$ de lados a, b, c y alturas referidas a estos lados h_a, h_b, h_c .

Sean V_a, V_b, V_c los volúmenes de los cuerpos que genera el triángulo al girar alrededor de cada uno de los lados.

El volumen de estos cuerpos es igual al volumen de un cono de radio la altura del triángulo y altura el lado del triángulo respectivo:

$$V_a = \frac{1}{3} \pi h_a^2 \cdot a, \quad V_b = \frac{1}{3} \pi h_b^2 \cdot b, \quad V_c = \frac{1}{3} \pi h_c^2 \cdot c.$$

$$a = \frac{3V_a}{\pi h_a^2}, \quad b = \frac{3V_b}{\pi h_b^2}, \quad c = \frac{3V_c}{\pi h_c^2}.$$

El área del triángulo $\triangle ABC$:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

$$\frac{1}{2} \frac{3V_a}{\pi h_a^2} h_a = \frac{1}{2} \frac{3V_b}{\pi h_b^2} h_b = \frac{1}{2} \frac{3V_c}{\pi h_c^2} h_c.$$

$$\frac{V_a}{h_a} = \frac{V_b}{h_b} = \frac{V_c}{h_c}.$$

$$aV_a = bV_b = cV_c.$$

$$(a h_a)^2 = \left(\frac{1}{2} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \right)^2. \text{ Elevant al quadrat:}$$

$$4a^2 h_a^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

$$\frac{12V_a}{\pi} a = \left(a + \frac{V_a}{V_b} a + \frac{V_a}{V_c} a \right) \left(-a + \frac{V_a}{V_b} a + \frac{V_a}{V_c} a \right) \left(a - \frac{V_a}{V_b} a + \frac{V_a}{V_c} a \right) \left(a + \frac{V_a}{V_b} a - \frac{V_a}{V_c} a \right).$$

$$\frac{12V_a V_b^4 V_c^4}{\pi} = (V_b V_c + V_a V_c + V_a V_b) (-V_b V_c + V_a V_c + V_a V_b) (V_b V_c - V_a V_c + V_a V_b) (V_b V_c + V_a V_c - V_a V_b) a^3$$

$$a^3 = \frac{12V_a V_b^4 V_c^4}{\pi (V_b V_c + V_a V_c + V_a V_b) (-V_b V_c + V_a V_c + V_a V_b) (V_b V_c - V_a V_c + V_a V_b) (V_b V_c + V_a V_c - V_a V_b)}$$

Anàlogamente,

$$b^3 = \frac{12V_b V_a^4 V_c^4}{\pi (V_a V_c + V_b V_c + V_b V_a) (-V_a V_c + V_b V_c + V_b V_a) (V_a V_c - V_b V_c + V_b V_a) (V_a V_c + V_b V_c - V_b V_a)}$$

$$c^3 = \frac{12V_c V_a^4 V_b^4}{\pi (V_a V_b + V_c V_a + V_c V_b) (-V_a V_b + V_c V_a + V_c V_b) (V_a V_b - V_c V_a + V_c V_b) (V_a V_b + V_c V_a - V_c V_b)}$$