Problema n°708
Calcular los tres lados de un triángulo, cuando se conocen los volúmenes que engendra este triángulo, al girar sucesivamente alrededor de cada uno de dichos lados.

Ruiz, A. (1925) “Elementos de GEOMETRÍA”. Zaragoza.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche, Paris, France

Soit ABC un triangle dont les côtés ont pour dimensions : BC = a, CA = b et AB = c. Les hauteurs issues de A,B et C sont respectivement AH = p, BQ = q et CR = r
Le volume V_1 engendré par ce triangle quand on le fait pivoter autour BC est constitué par la somme algébrique des volumes de deux cônes de sommets B et C qui ont pour même base un cercle de rayon égal à la hauteur AH issue de A. La mesure de chacun de ces deux volumes est positive si les angles en B et C sont aigus. Si l’un de ces angles est obtus,le volume du plus petit cône est mesuré négativement.
Il en résulte la relation (R_1):

$V_1 = (\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC})*\pi p^2/3 = a\pi p^2/3.$

D’où $3aV_1/\pi = (ap)^2 = 4S^2$ avec S qui est égal à l’aire du triangle ABC.

Ce qui permet d’écrire $3aV_1/\pi = 3bV_2/\pi = 3cV_3/\pi = 4S^2$.
D’où la relation (R_2) :
$b = aV_1/V_2$. En posant $V_1/V_2 = \lambda$, on a $b = a\lambda$.
et la relation (R_3) :
$c = aV_1/V_3$. En posant $V_1/V_3 = \mu$, on a $c = a\mu$.

Or la hauteur AH = p s’exprime en fonction des côtés a,b et c du triangle selon la formule :
$p^2 = [2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) – (a^4 + b^4 + c^4)]/4a^2$
D’où $p^2 = a^2(2\lambda^2 + 2\lambda^2\mu^2 + 2\mu^2 – 1 – \lambda^4 – \mu^4)/4$

D’où $3V_1 = \pi ap^2 = \pi a^3(2\lambda^2 + 2\lambda^2\mu^2 + 2\mu^2 – 1 – \lambda^4 – \mu^4)/4$

Soit $a = \sqrt[3]{\dfrac{12V_1}{\pi(2\lambda^2 + 2\lambda^2\mu^2 + 2\mu^2 - 1 - \lambda^4 - \mu^4)}}$ avec $\lambda = V_1/V_2$ et $\mu = V_1/V_3$.

puis b et c à partir des relations (R_2) et (R_3).