

74. Calcular los tres lados de un triángulo, cuando se conocen los volúmenes que engendra este triángulo, al girar sucesivamente alrededor de cada uno de dichos lados.

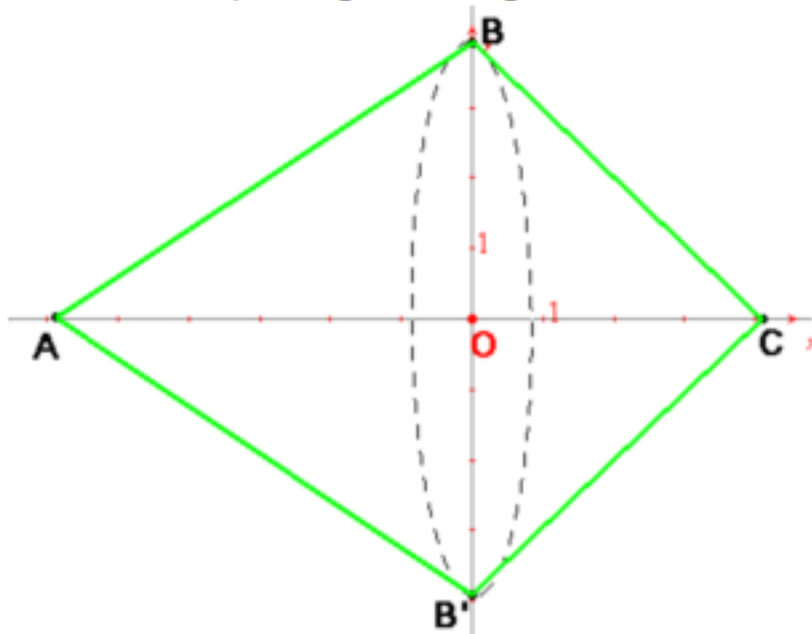
Problema 708

74. Calcular los tres lados de un triángulo, cuando se conocen los volúmenes que engendra este triángulo, al girar sucesivamente alrededor de cada uno de dichos lados.

Ruiz, A (1925) “Elementos de GEOMETRÍA”. Zaragoza.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

El volumen V_b que engendra al girar alrededor del lado AC es la suma de los volúmenes de dos conos unidos por la base (de radio OB , la altura del triángulo sobre AC) y alturas respectivas (los conos) los segmentos AO y OC . Esto es:



$$V_b = \frac{\pi}{3} \cdot OB^2 \cdot AC = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{\Delta^2}{AC} = \frac{4\pi \cdot \Delta^2}{3} \cdot \frac{1}{b}.$$

El valor $k = \frac{4\pi \cdot \Delta^2}{3}$ con $\Delta = \text{área}(ABC)$, sólo depende del triángulo, es una constante del mismo.

Tenemos pues, haciendo lo mismo para cada lado, $a \cdot V_a = b \cdot V_b = c \cdot V_c = k$: los lados del triángulo son inversamente proporcionales a los volúmenes engendrados por giro. Calculando k habremos resuelto el problema.

Consideramos ahora el triángulo formado por los inversos de los volúmenes. Llamamos a', b' y c' a sus lados y V'_a, V'_b y V'_c a los volúmenes correspondientes en el sentido mencionado antes; $a' = \frac{1}{V_a} = a \cdot \frac{1}{k}$, o bien $\frac{a'}{a} = \frac{1}{k}$. Es semejante al que buscamos y la razón respecto a él es $\frac{1}{k}$.

También se verifica $V'_a \cdot a' = k'$, o bien $V'_a \cdot \frac{1}{V_a} = \frac{V'_a}{V_a} = k' = \left(\frac{1}{k}\right)^3 =$ cubo de la razón de semejanza. Así pues calcular k' resuelve el problema: $k' = \frac{4\pi \cdot \Delta'^2}{3}$, donde ahora Δ' representa el área del triángulo formado con los lados $\frac{1}{V_a}, \frac{1}{V_b}$ y $\frac{1}{V_c}$. ■

$$a = k \cdot \frac{1}{V_a}$$