

Solución al Problema 709
propuesto en Triángulos Cabri
quincena del 1 al 15 de mayo de 2014

enviada por
Andrea Fanchini
Cantú,
Italia.

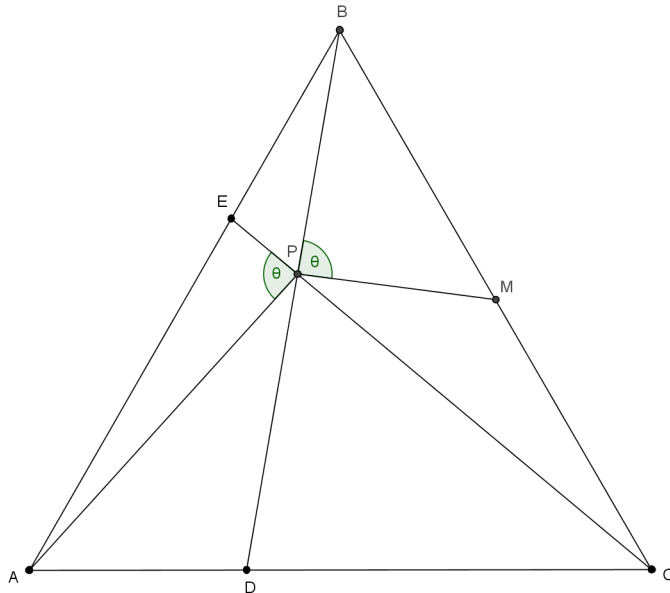
Mayo 14, 2014

Problema 709. *De Diego, B. y otros (2013): Problemas de Oposiciones . Deimos Matemáticas. Tomo 5 (2006 al 2013).*

En un triángulo equilátero ABC se eligen los puntos D y E situados en los lados AC y AB , respectivamente, tales que los segmentos AE y CD miden lo mismo. Sea M el punto medio del lado BC y P la intersección de BD con CE . Pruebe que los ángulos $\angle APE$ y $\angle BPM$ son iguales.

Baleares, Opción B. Oposiciones 2006. (p. 268).

Solución 709. *(Andrea Fanchini, Cantú, Italia)*



Usando coordenadas baricéntricas tenemos los puntos D y E de la forma $D(1 - k : 0 : k)$ y $E(k : 1 - k : 0)$. Por lo tanto las rectas BD y CE tienen ecuaciones

$$BD \equiv kx + (k - 1)z = 0 \quad ; \quad CE \equiv (k - 1)x + ky = 0$$

El punto P , intersección de las rectas BD y CE , tiene coordenadas $P(1 : \frac{1-k}{k} : \frac{k}{1-k})$. Las coordenadas baricéntricas $(p : q : r)$ de la recta AP son

$$p = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1-k}{k} \\ 0 & \frac{k}{1-k} \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad q = \begin{vmatrix} 0 & \frac{k}{1-k} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{k}{k-1} \quad ; \quad r = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1-k}{k} \end{vmatrix} = \frac{1-k}{k}$$

Por lo tanto la recta AP tiene la ecuación $AP \equiv \frac{k}{k-1}y + \frac{1-k}{k}z = 0$. Ahora la fórmula que expresa el ángulo entre dos líneas es

$$S_\theta = S \cot \theta = \frac{S_A(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + S_B(r_1 - p_1)(r_2 - p_2) + S_C(p_1 - q_1)(p_2 - q_2)}{}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}$$

donde en el caso del triángulo equilátero $S = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $S_A = S_B = S_C = \frac{1}{2}$. Sustituyendo las coordenadas baricéntricas de las rectas AP y CE , el ángulo $\angle APE$ formado por estas líneas será

$$\cot APE = \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{3k^3 - 4k^2 + 4k - 1}{k^3 - 2k^2 + 2k - 1}$$

La recta MP que pasa por los puntos $M(0 : 1 : 1)$ y $P(1 : \frac{1-k}{k} : \frac{k}{1-k})$ tiene coordenadas baricéntricas

$$p = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1-k}{k} \\ 1 & \frac{k}{1-k} \end{vmatrix} = \frac{2k-1}{k(1-k)} \quad ; \quad q = \begin{vmatrix} 1 & \frac{k}{1-k} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad ; \quad r = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1-k}{k} \end{vmatrix} = -1$$

Por lo tanto la recta MP tiene la ecuación $MP \equiv \frac{2k-1}{k(1-k)}x + y - z = 0$.

Ahora sustituyendo las coordenadas baricéntricas de las rectas MP y BD en la fórmula que expresa el ángulo entre dos líneas , $\angle BPM$ formado por estas líneas será

$$\cot BPM = \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{3k^3 - 4k^2 + 4k - 1}{k^3 - 2k^2 + 2k - 1}$$

siendo la cantidad equivalente a la que ya calculada, se prueba que $\angle APE \cong \angle BPM$.