

Problema 709.-

En un triángulo equilátero ABC se eligen los puntos D y E situados en los lados AC y AB, respectivamente, tales que los segmentos AE y CD miden lo mismo.

Sea M el punto medio del lado BC y P la intersección de BD con CE.

Pruebe que los ángulos $\angle APE$ y $\angle BPM$ son iguales.

Baleares, Opción B. Oposiciones 2006. (p. 268)

Propuesto por De Diego, Braulio y otros (2013): Problemas de oposiciones. Deimos Matemáticas. Tomo 5 (2006 al 2013)

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Sea esta la configuración dada (Figura 1) por el enunciado del problema.

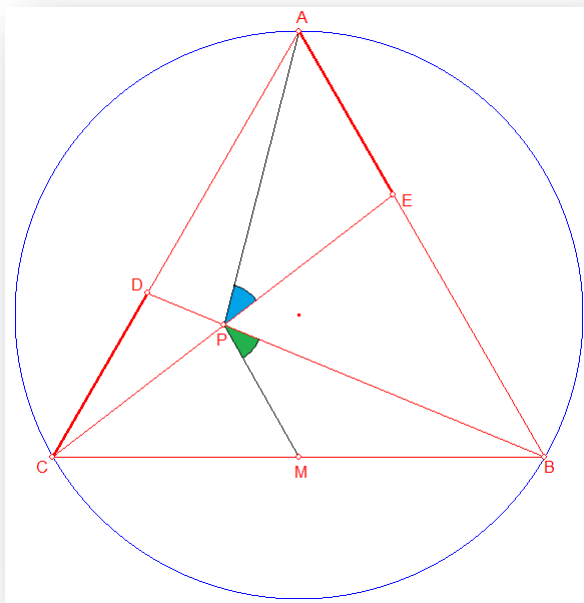


Figura 1

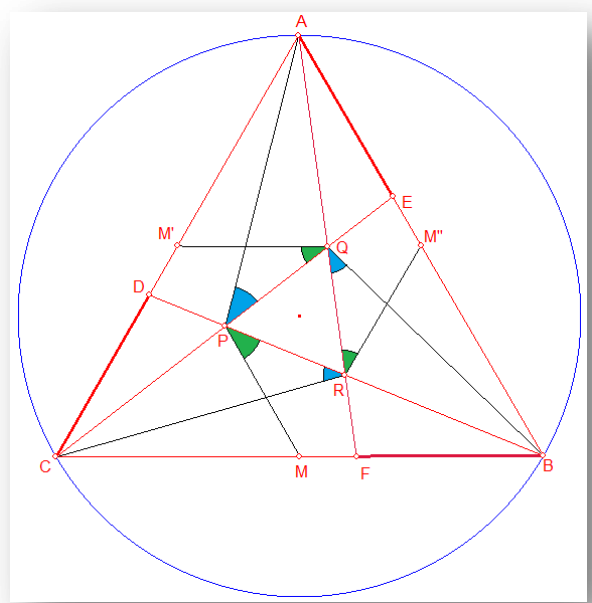


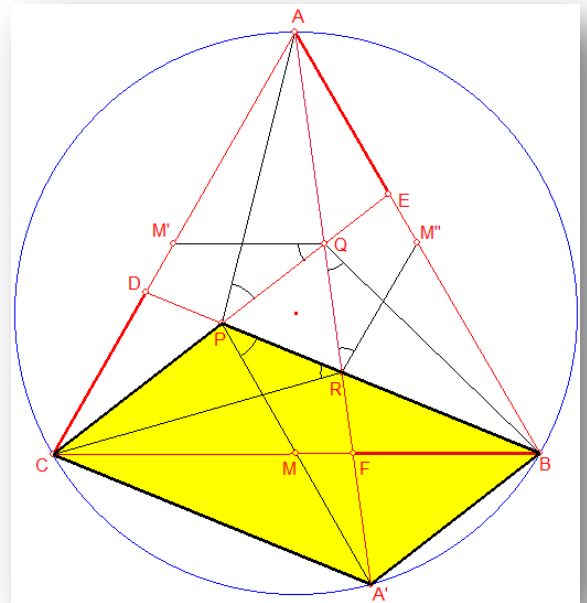
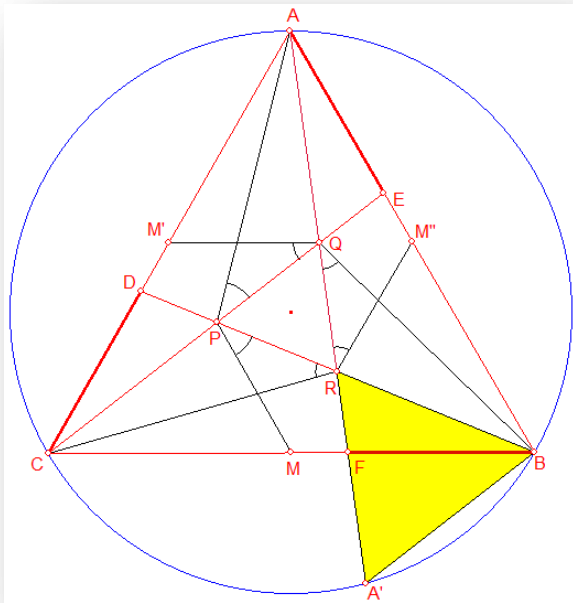
Figura 2

Vamos a completar (Figura 2), la construcción enunciada para los tres lados del triángulo equilátero ABC.

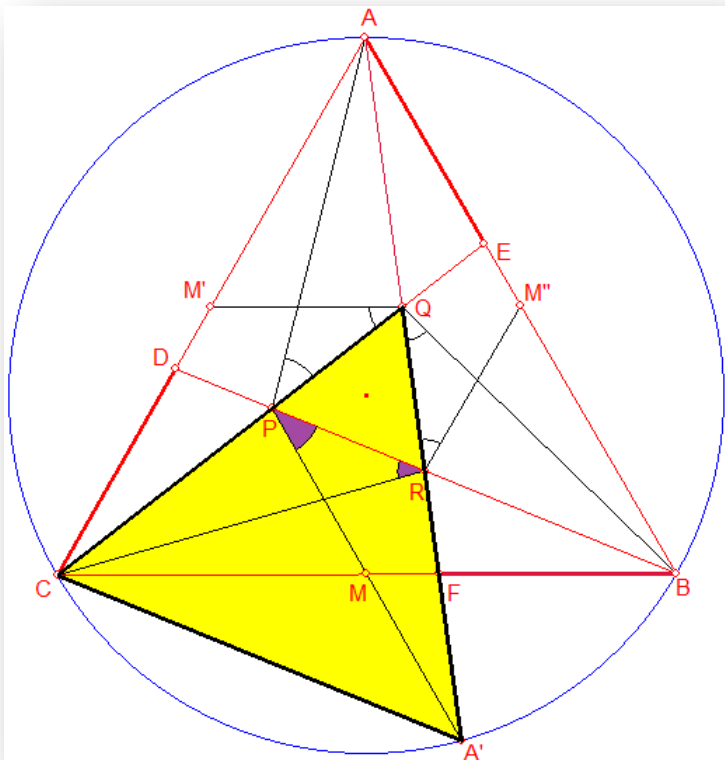
Por razones de simetría, resulta obvia la igualdad existente entre los ángulos que se señalan con el mismo color. También destacamos la aparición de un nuevo triángulo equilátero, el PQR.

Nuestra solución probará que los ángulos $\angle CRP$ y $\angle BPM$ son iguales y, de esta forma quedaría demostrada la igualdad entre los ángulos $\angle APE$ y $\angle BPM$.

Para ello, prolongamos la ceviana AF hasta determinar el punto A' sobre la circunferencia circunscrita. Observamos el triángulo A'BR.



Este triángulo A'BR es equilátero. En efecto, el ángulo A' inscrito en la circunferencia abarca el lado AB del triángulo equilátero ABC y además el ángulo en R es también de 60° , por ser opuesto al ángulo R del triángulo equilátero PQR. Como consecuencia de este hecho, advertimos que el cuadrilátero A'CPB es un paralelogramo debido a que los lados opuestos $A'B = (BR) = PC$ y los ángulos en P y en A' son iguales a 120° . Como M es el punto medio de la diagonal BC, lo será también de la otra diagonal A'P.



Además se concluye otra propiedad definitiva, el triángulo A'QC es también equilátero ya que los segmentos PC y RA' son iguales.

Por fin, en el triángulo equilátero A'QC las cevianas A'P y CR determinan sobre el lado PR, paralelo al lado A'C, la igualdad de ángulos $\angle CRP = \angle A'PM = \angle BPM$.

c.q.d.