

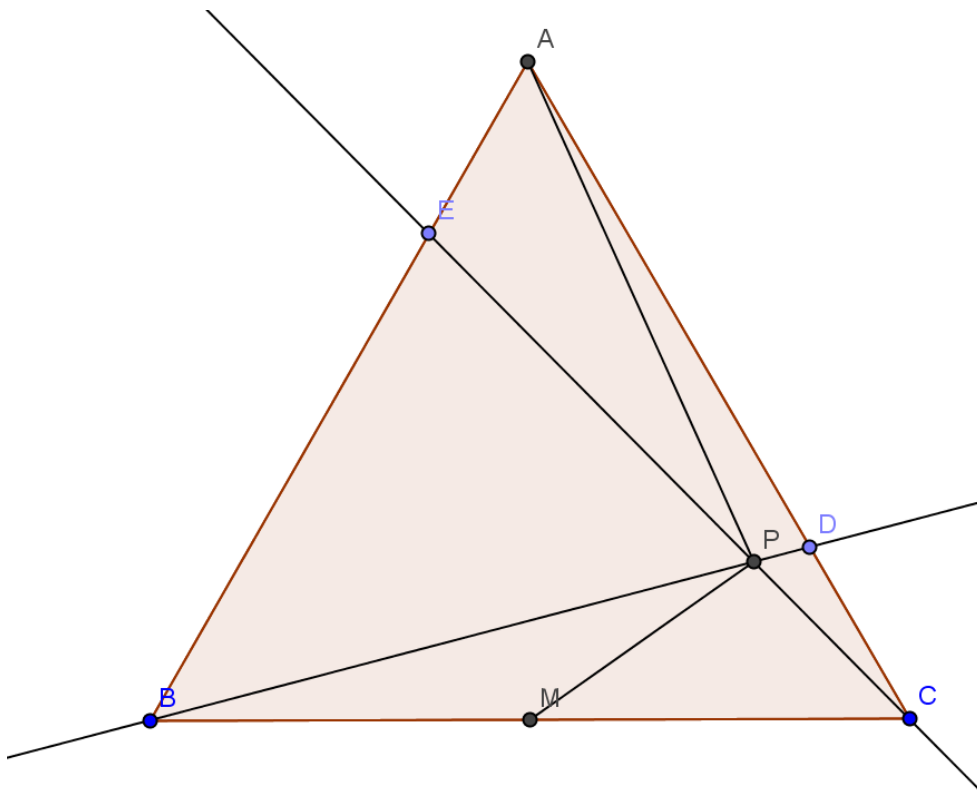
Problema 709

06.67 En un triángulo equilátero ABC se eligen los puntos D y E situados en los lados AC y AB , respectivamente, tales que los segmentos AE y CD miden lo mismo. Sea M el punto medio del lado BC y P la intersección de BD con CE . Pruebe que los ángulos $\angle APE$ y $\angle BPM$ son iguales.

Baleares, Opción B. Oposiciones 2006. (p. 268)

De Diego, B. y otros (2013): Problemas de Oposiciones . Deimos Matemáticas. Tomo 5 (2006 al 2013)

Solución del director.



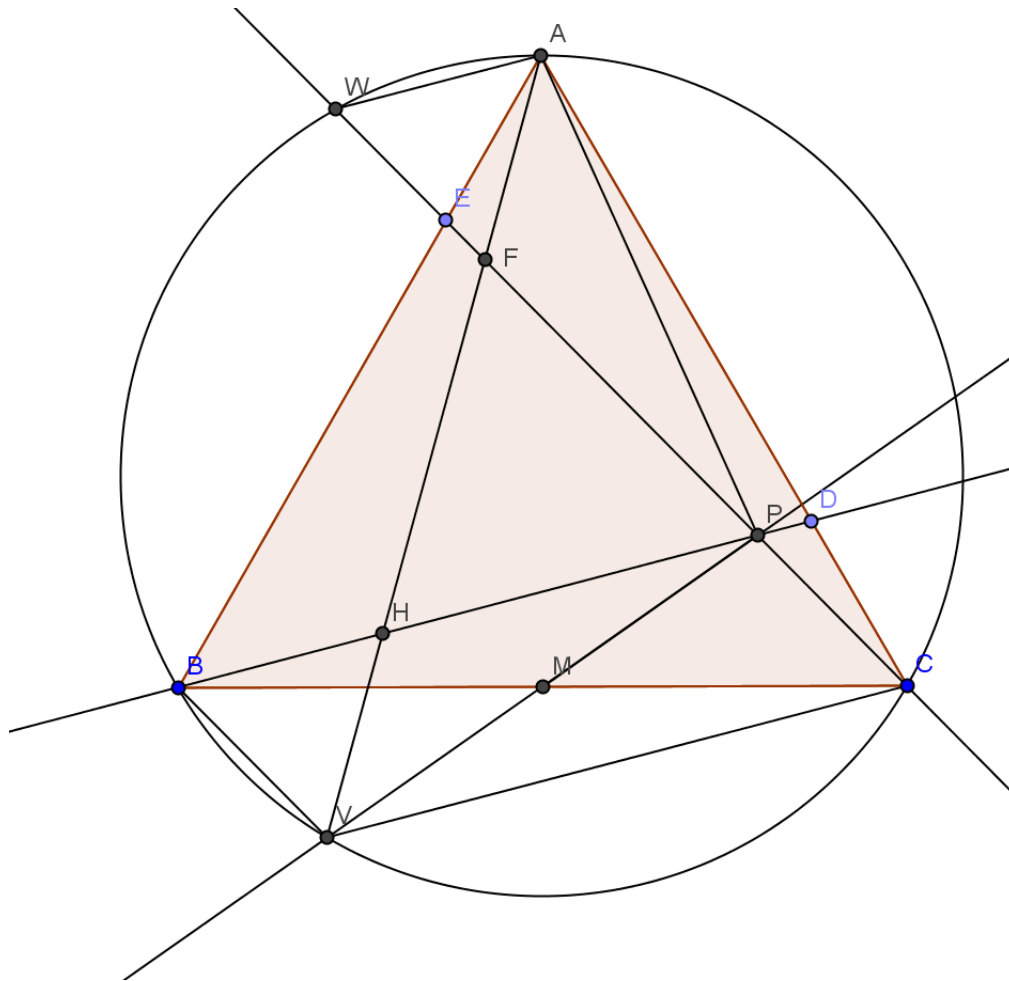
Sea $\angle DBC = \omega$; Será por analogía $\angle ACE = \omega$; $\angle BCP = 60^\circ - \omega$ luego

$$\angle BPC = 180^\circ - \omega - (60^\circ - \omega) = 120^\circ$$

Tracemos la circunferencia circunscrita a ABC ; la recta PM la cortará en V .

Por simetría es $\angle PVC = 120^\circ$

Tracemos AV . $\angle AVC = \angle ABC = 60^\circ$



Tenemos $\angle BCV = \omega$, $\angle CBV = 60^\circ - \omega$. Así si es H el punto de intersección de BD con AV, es BHV equilátero.

Sea W el punto de corte de CE con la circunscrita.

Es $\angle WAC = \angle BAC = 60^\circ$, $\angle VAW = \angle VAB + \angle BAW = \angle VCB + \angle BCW = \omega + (60^\circ - \omega) = 60^\circ$.

Luego si F es el punto de corte de CW con AV, el triángulo AWF es equilátero con lados iguales al BHV estudiado anteriormente.

Así el triángulo PFH es equilátero.

Los triángulos BHV y BFA resuelven el problema propuesto, pues tienen los lados BF y BH iguales, y los HV y FA también, además de tener los ángulos $\angle BHV$ y $\angle BFA$ de 120° . Luego los ángulos $\angle HPV = \angle BPM$ y $\angle FPA = \angle APE$ son iguales por la congruencia de BHV y BFA.

Ricardo Barroso Campos.

Jubilado

Sevilla

