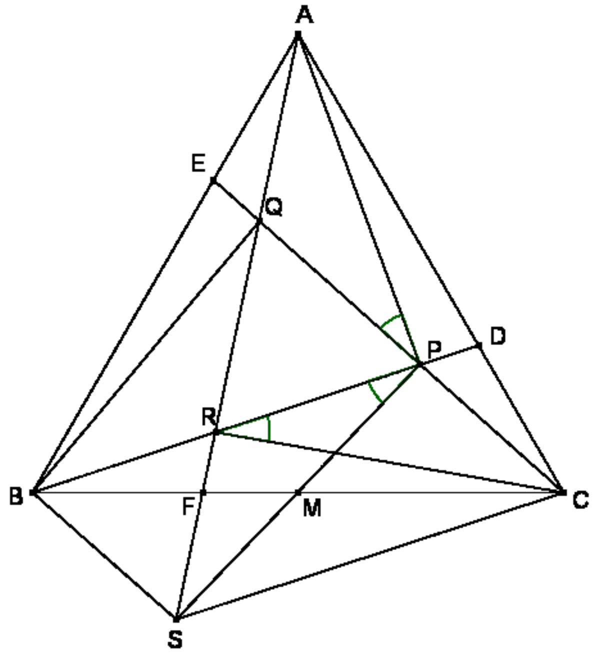
Problema n°709
En un triángulo equilátero ABC se eligen los puntos D y E situados en los lados AC y AB, respectivamente, tales que los segmentos AE y CD miden lo mismo. Sea M el punto medio del lado BC y P la intersección de BD con CE. Pruebe que los ángulos < APE y < BPM son iguales.

Baleares, Opción B. Oposiciones 2006. (p. 268)

De Diego, B. y otros (2013): Problemas de Oposiciones . Deimos Matemáticas. Tomo 5 (2006 al 2013)

Solution proposée par Philippe Fondanaiche, Paris, France

On trace F sur BC tel que BF = AE = CD. Les points Q et R sont à l’intersection de AFet de CE d’une part et de AF et de BD d’autre part. Le triangle PQR est évidemment équilatéral tandis que les triangles CPA, BRC et AQB sont isométriques entre eux de même que les triangles CQA, ARB et BPC.
Par rotation de centre C et d’angle +60° (sens anti-horaire) le segment CQ devient le segment CS tandis que le triangle AQS devient le triangle BSC avec BS = AQ = CP..



La figure ci-dessus fait apparaître immédiatement les propriétés suivantes :
- CQS est un triangle équilatéral,
- BPCS est un parallélogramme
- CPRS est un trapèze isocèle.

Les segments BC et SP sont concourants en leur milieu M.
On en déduit <BPM = <SPR = <CRP.
Les triangles BRC et CPA sont isométriques.
D’où <BRC = <CPA et par conséquent <APE = <CRP .
Conclusion : <BPM = <APE.