

Problema n°710

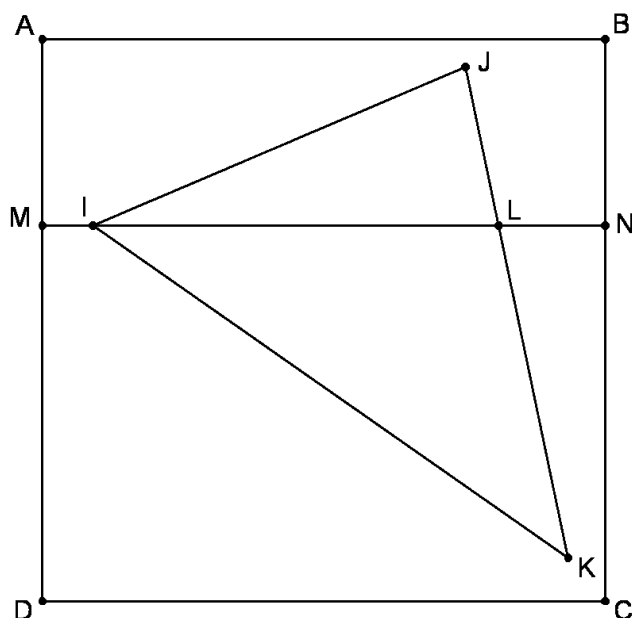
194 b) Se dan nueve puntos en el interior de un cuadrado de lado 1. Demostrar que tres de ellos son los vértices de un triángulo de área inferior o igual que $1/8$.

Perrin, D. (2005): [Mathématiques d'école, nombre, mesures et géométrie](#). Cassini. (p. 242)

Solution proposée par Philippe Fondanaiche, Paris, France

Ce problème est une application bien connue du principe des tiroirs (en anglais « Pigeonhole principle » et en espagnol « principio del palomar » o « principio de Dirichlet » o « principio de las cajas »...)

On partage le carré unité en quatre petits carrés identiques de côté $1/2$ et de surface $1/4$. En raison du principe des tiroirs 3 points I, J et K sont à l'intérieur ou sur les côtés d'un petit carré désigné ci-après par ABCD.



On trace la parallèle passant par I au côté AB qui rencontre les côtés AD et BC en M et N. L'aire du triangle IJK est égale à la somme des aires des triangles IJL et IKL.

L'aire du triangle IJL est au plus égale à la moitié de l'aire du rectangle ABNM. De même l'aire du triangle IKL est au plus égale à la moitié de l'aire du rectangle CDMN.

Il en résulte que l'aire du triangle IJK est au plus égale à la moitié de l'aire du carré ANCD dont l'aire est la somme des aires des deux rectangles ABNM et CDMN.

D'où $\text{aire IJK} \leq 1/8$.

L'égalité est obtenue quand, par exemple J est confondu avec B, K est confondu avec C et le point I est sur le côté AD.