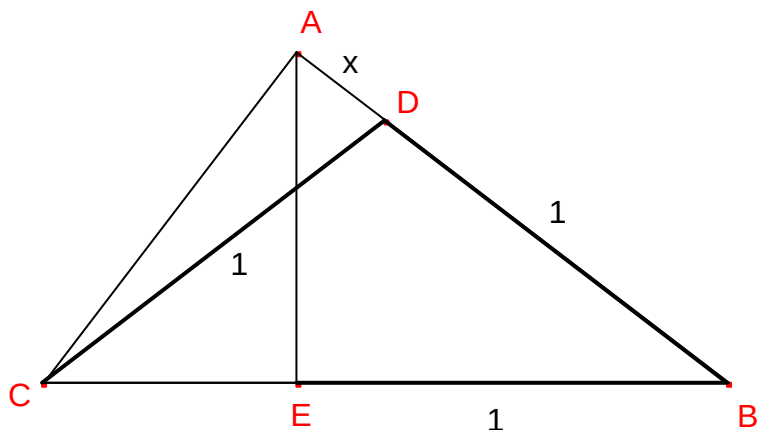


Problema 711

En un triángulo ABC rectángulo en A, tenemos AE altura tal que EB=1. Sobre AB tenemos D tal que CD=DB=1. Hallar AD.

Honsberger, R. (2003) Mathematical Diamonds. MAA (p. 204)

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor de Matemáticas del IES Blas Infante.



Por el teorema del cateto, $AB^2 = BE \cdot BC \rightarrow (1+x)^2 = BC$

Por el teorema de Pitágoras, $AC^2 = BC^2 - AB^2 \rightarrow AC^2 = (1+x)^4 - (1+x)^2$

Por tanto, $AD^2 = CD^2 - AC^2$, es decir, $x^2 = 1 - (1+x)^4 + (1+x)^2$

$$(1+x)^4 - (1+x)^2 + x^2 - 1 = 0$$

$$(1+x)^2 ((1+x)^2 - 1) + (x+1)(x-1) = 0$$

$$(x+1) ((1+x) (x^2 + 2x) + x - 1) = 0$$

$$x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x + x - 1 = 0$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0$$

Ahora bien, como $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, entonces:

$$x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = (x+1)^3 - 2 = 0 \rightarrow (x+1)^3 = 2 \rightarrow x = \sqrt[3]{2} - 1$$

En definitiva, $AD = \sqrt[3]{2} - 1$