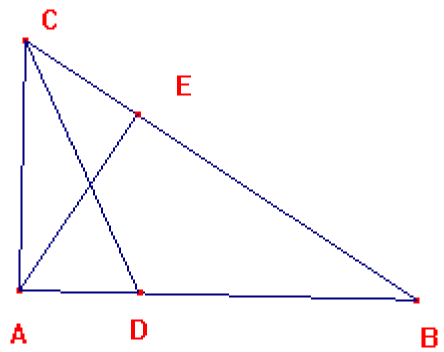
Problema 711

En un triángulo ABC rectángulo en A, tenemos AE altura tal que EB=1. Sobre AB tenemos D tal que CD=DB=1. Hallar AD.

Honsberger, R. (2003) Mathematical Diamonds. MAA (p. 204)

Solución del director.

Sea la figura dada.



Sean x=AD, m=CE. Si trazamos la mediatriz de CB, que cortará a CB en M y a AB en D, tenemos: MB/BD=EB/BA. Es decir: $\dfrac{\frac{1+m}{2}}{1} = \dfrac{1}{1+x}$.

De donde: 1+m+x+mx=2, o sea: $x = \dfrac{1-m}{1+m}$

Así, $AB = 1 + \dfrac{1-m}{1+m} \Rightarrow AB = \dfrac{2}{1+m}$

En el triángulo rectángulo ADC es: $AC^2 = 1 - x^2 = 1 - \left(\dfrac{1-m}{1+m}\right)^2$

Ahora en ABC es:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow (1+m)^2 = \frac{4}{(1+m)^2} + 1 - \left(\frac{1-m}{1+m}\right)^2 .$$

Desarrollando, tenemos:

$(1+m)^4 = 4 + (1+2m+m^2) - (1-2m+m^2) = 4+4m$

De ello se obtiene: $(1+m)^3=4$, es decir: $m = \sqrt[3]{4} - 1$.

Y por último, $x = \dfrac{1-(\sqrt[3]{4}-1)}{1+(\sqrt[3]{4}-1)} = \dfrac{2-\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{2} - 1$.

Ricardo Barroso Campos
Didáctica de las Matemáticas
Universidad de Sevilla