

Problema 711

En un triángulo $\triangle ABC$ rectángulo en A, tenemos $\overline{AE}$ altura tal que $\overline{EB} = 1$.

Sobre $\overline{AB}$ tenemos D tal que $\overline{CD} = \overline{DB} = 1$.

Hallar $\overline{AD}$.

Honsberger, R. (2003) Mathematical Diamonds. MAA (p. 204)

Solución de Ricard Peiró:

Sea $\overline{AD} = x$.

El circuncentro de un triángulo rectángulo es el punto medio de la hipotenusa.

Sea O el circuncentro.

$\overline{CD} = \overline{DB} = 1$, entonces D pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{BC}$.

Los triángulos rectángulos $\triangle AEB$, $\triangle DOB$ son semejantes.

Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{\overline{OB}}{1} \quad (1)$$

Los triángulos rectángulos $\triangle CAB$, $\triangle DOB$ son semejantes.

Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{OB}}{1} = \frac{1+x}{2 \cdot \overline{OB}} \quad (2)$$

Substituyendo la expresión (1) en la expresión (2):

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1+x}{2 \cdot \frac{1}{1+x}}.$$

Simplificando:

$(1+x)^3 = 2$. Resolviendo la ecuación:

$$x = \sqrt[3]{2} - 1.$$

