

Solución al Problema 712
propuesto en Triángulos Cabri
quincena del 1 al 15 de junio de 2014

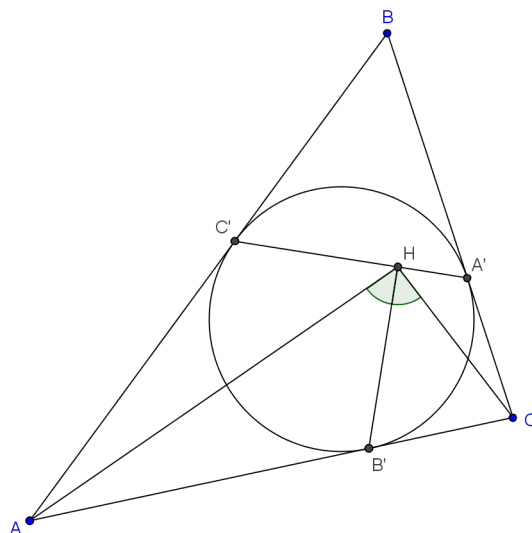
enviada por
Andrea Fanchini
Cantú,
Italia.

Junio 03, 2014

Problema 712. Jay Warendorff (2012): <http://demonstrations.wolfram.com/AnAngleBisection/>.

Sea ABC un triángulo y sea A' , B' , y C' son los puntos de contacto de la circunferencia inscrita opuestos a A , B , y C , respectivamente. Sea H el pie de la perpendicular a $A'C'$ de B' . Demostrar que HB' es bisectriz del ángulo AHC .

Solución 712. (Andrea Fanchini, Cantú, Italia)



Usando coordenadas baricéntricas tenemos que $A'(0 : s - c : s - b)$, $B'(s - c : 0 : s - a)$ y $C'(s - b : s - a : 0)$. Por tanto la recta $A'C'$ tiene ecuación

$$\begin{vmatrix} 0 & s - c & s - b \\ s - b & s - a & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad A'C' \equiv (s - a)x - (s - b)y + (s - c)z = 0$$

El punto del infinito de la recta $A'C'$ es $A'C'_{\infty}(-a : a - c : c)$

Las rectas perpendicular a la recta $A'C'$ tienen el punto del infinito

$$(S_B(a - c) - S_C c : S_C c + S_A a : -S_A a - S_B(a - c)) = (a : -(a + c) : c)$$

Por tanto la recta perpendicular a $A'C'$ de B' tendrá ecuación

$$\begin{vmatrix} s - c & 0 & s - a \\ a & -(a + c) & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad B'H \equiv (s - a)(a + c)x + (s - b)(c - a)y - (s - c)(a + c)z = 0$$

El punto H es la intersección entre las rectas $A'C'$ y $B'H$, por tanto

$$H((s-b)(s-c)(a+c)-(s-b)(c-a)(s-c):(s-c)(s-a)(a+c)+(s-c)(a+c)(s-a):(s-a)(s-b)(c-a)+(s-a)(a+c)(s-b))$$

desarrollando y simplificando $H(a(s-b)(s-c):(s-a)(s-c)(a+c):c(s-a)(s-b))$

La recta AH tiene ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a(s-b)(s-c) & (s-a)(s-c)(a+c) & c(s-a)(s-b) \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow AH \equiv c(s-b)y - (s-c)(a+c)z = 0$$

La recta CH tiene ecuación

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a(s-b)(s-c) & (s-a)(s-c)(a+c) & c(s-a)(s-b) \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow CH \equiv (s-a)(a+c)x - a(s-b)y = 0$$

Ahora la fórmula que expresa el ángulo entre dos líneas es

$$S_{\theta} = S \cot \theta = \frac{S_A(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + S_B(r_1 - p_1)(r_2 - p_2) + S_C(p_1 - q_1)(p_2 - q_2)}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}$$

Por tanto el ángulo AHB' viene dado por

$$S_{AHB'} = S \cot \widehat{AHB'} = \frac{S_A(c(s-b)+(s-c)(a+c))((c-a)(s-b)+(s-c)(a+c))+S_B(-(s-c)(a+c))(-b(a+c))+S_C(-c(s-b))((s-a)(a+c)-(c-a)(s-b))}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c(s-b) & -(s-c)(a+c) \\ (s-a)(a+c) & (c-a)(s-b) & -(s-c)(a+c) \end{vmatrix}}$$

En el mismo modo el ángulo $B'HC$ viene dado por

$$S_{B'HC} = S \cot \widehat{B'HC} = \frac{S_A(-a(s-b))((c-a)(s-b)+(s-c)(a+c))+S_B(-(s-a)(a+c))(-b(a+c))+S_C((s-a)(a+c)+a(s-b))((s-a)(a+c)-(c-a)(s-b))}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (s-a)(a+c) & -a(s-b) & 0 \\ (s-a)(a+c) & (c-a)(s-b) & -(s-c)(a+c) \end{vmatrix}}$$

Ahora. haciendo operaciones, desarrollando y simplificando, se obtiene

$$S_{AHB'} = S_{B'HC} = \frac{2b(a^2 - b^2 + c^2 + 2ac)}{a + c} \Rightarrow \angle AHB' \cong \angle B'HC \quad q.e.d.$$