

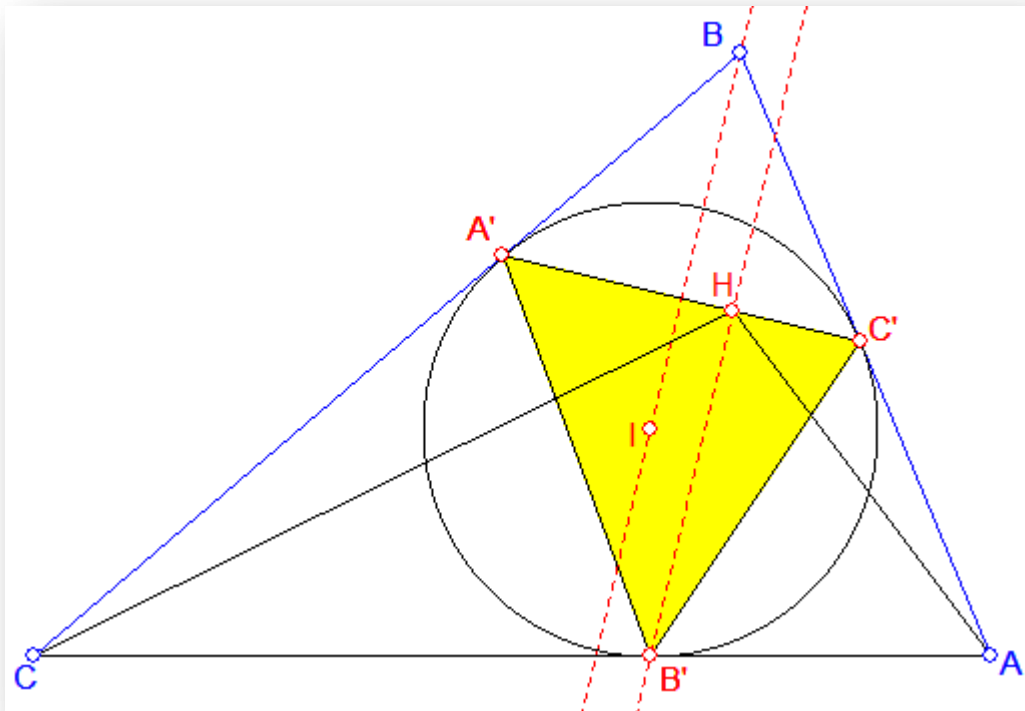
Problema 712.-

Sea ABC un triángulo y sea A', B', y C' son los puntos de contacto de la circunferencia inscrita opuestos a A, B, y C, respectivamente. Sea H el pie de la perpendicular a A'C' de B'. Demostrar que HB' es bisectriz del ángulo AHC.

Jay Warendorff (2012): <http://demonstrations.wolfram.com/AnAngleBisection/>

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Consideramos el triángulo ABC y su circunferencia inscrita de centro I. Sea el triángulo A'B'C' determinado por los puntos de contacto del triángulo ABC con esta circunferencia.



Si llamamos p al semiperímetro del triángulo ABC, $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ entonces se sabe que:

$$A'B = BC' = p - b; \quad C'A = AB' = p - a; \quad B'C = CA' = p - c;$$

Por tanto, del triángulo A'B'C', conocemos tanto sus lados como sus ángulos. Serán estos:

$$\begin{aligned} A'C' &= 2(p - b) \sin \frac{\beta}{2} & B' &= 90^\circ - \frac{\beta}{2} \\ B'C' &= 2(p - a) \sin \frac{\alpha}{2} & A' &= 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \\ A'B' &= 2(p - c) \sin \frac{\gamma}{2} & C' &= 90^\circ - \frac{\gamma}{2} \end{aligned}$$

Así en el triángulo A'B'C', la altura $h_b = HB'$ vendrá determinada por las expresiones:

$$h_b = 2(p - a) \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = 2(p - c) \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

Considerando ahora el triángulo AB'H, el ángulo en B', $\angle B' = \frac{\beta}{2} + \alpha$ como puede deducirse a partir del paralelismo entre las rectas BI y HB', ambas perpendiculares al lado A'C'. Por tanto, por el teorema del coseno, podemos determinar el lado AH del modo siguiente:

$$AH^2 = h_b^2 + (p - a)^2 - 2(p - a)h_b \cos\left(\frac{\beta}{2} + \alpha\right)$$

Procediendo de forma análoga con el triángulo CB'H, podemos también establecer el lado CH de la forma:

$$CH^2 = h_b^2 + (p - c)^2 - 2(p - c)h_b \cos\left(\frac{\beta}{2} + \alpha\right)$$

Si finalmente probamos que se verifica la relación $\frac{AH^2}{CH^2} = \frac{(p-a)^2}{(p-c)^2}$, esto será suficiente para demostrar que, en efecto, HB' es la bisectriz del ángulo AHC.

Nos disponemos pues, a demostrar dicha proporción en el caso general ($a \neq c$).

Si $a=c$, el resultado sería trivial.

$$\frac{AH^2}{CH^2} = \frac{(p-a)^2}{(p-c)^2} \Leftrightarrow AH^2(p-c)^2 = CH^2(p-a)^2$$

$$\left(h_b^2 + (p-a)^2 - 2(p-a)h_b \cos\left(\frac{\beta}{2} + \alpha\right)\right)(p-c)^2 = \left(h_b^2 + (p-c)^2 - 2(p-c)h_b \cos\left(\frac{\beta}{2} + \alpha\right)\right)(p-a)^2$$

$$\left(h_b^2 - 2(p-a)h_b \cos\left(\frac{\beta}{2} + \alpha\right)\right)(p-c)^2 = \left(h_b^2 - 2(p-c)h_b \cos\left(\frac{\beta}{2} + \alpha\right)\right)(p-a)^2$$

$$4(p-a)^2(p-c)^2\left[\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\left(\frac{\beta}{2} + \alpha\right) - \sin^2\frac{\gamma}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\beta}{2} + \alpha\right)\right] = 0$$

Como $a \neq c$, entonces, $p-a \neq p-c$.

$$\left[\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\left(\frac{\beta}{2} + \alpha\right) - \sin^2\frac{\gamma}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\beta}{2} + \alpha\right)\right] = 0 \quad [I]$$

Como quiera que:

$$\cos\left(\frac{\beta}{2} + \alpha\right) = -\cos\left(\frac{\beta}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) - \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Sustituyendo finalmente en [I], llegamos a la siguiente identidad nula.

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = 0$$

c. q. d.