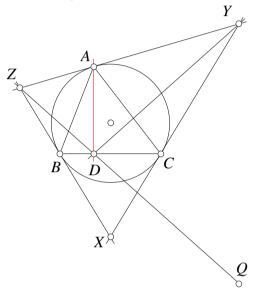
Problema 712 de triánguloscabri. Sea ABC un triángulo y sean A', B' y C' los puntos de contacto de la circunferencia inscrita opuestos a A, B, y C, respectivamente. Sea H el pie de la perpendicular a A'C' de B'. Demostrar que HB' es bisectriz del ángulo AHC.

Jay Warendorff.

Solución de Francisco Javier García Capitán

Si tomamos A'B'C' como triángulo de referencia, el problema queda así:

Problema 712a de triánguloscabri. Sean ABC un triángulo, D el pie de la altura trazada por A y XYZ el triángulo tangencial. Entonces AD es una bisectriz del ángulo YDZ.



Usando coordenadas baricéntricas tenemos que  $D=(0:S_C:S_B)$ ,  $Y=(a^2:-b^2:c^2)$  y  $Z=(a^2:b^2:-c^2)$ . Observemos que el punto  $Q=(-a^2:a^2-c^2:a^2-b^2+2c^2)$  tiene como suma de coordenadas (peso) la cantidad  $a^2-b^2+c^2=2S_B$ , la misma que Y, por lo que restando las coordenadas de ambos puntos obtenemos el punto del infinito de la recta YQ, que es  $(-2a^2:a^2+b^2-c^2:a^2-b^2+c^2)=(-a^2:S_C:S_B)$ , el mismo que el de la recta AD. Además, al sumar las coordenadas de Y y Q, la primera coordenada se anula, por lo que el punto medio de YQ está sobre la recta BC, y en consecuencia, Q es el punto simétrico de Y respecto de la recta BC.

Además, tenemos el determinante

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & -c^2 \\ 0 & a^2 - c^2 + b^2 & a^2 - b^2 + c^2 \\ -a^2 & a^2 - c^2 & a^2 - b^2 + 2c^2 \end{vmatrix} = 0,$$

va que sumando la primera y tercera fila obtenemos la segunda.

Por tanto, los puntos Y, D, Q están alineados y la recta BC es una bisectriz del ángulo YDQ, por lo que también lo será la perpendicular AD.