

Problema 712

Siga el triangle $\triangle ABC$ i siguin A' , B' , i C' els punts de tangència de la circumferència inscrita oposats a A , B , i C respectivament.

Siga H el peu de la perpendicular a $\overline{A'C'}$ de B' .

Demostreu que HB' és bisectriu de l'angle $\angle AHC$.

Solució de Ricard Peiró:

$$\overline{AB'} = \overline{AC'} = \frac{b+c-a}{2}, \quad \overline{BA'} = \overline{BC'} = \frac{a+c-b}{2},$$

$$\overline{CA'} = \overline{CB'} = \frac{a+b-c}{2}.$$

$$\text{Aleshores, } \angle C'A'B = \angle A'C'B = 90^\circ - \frac{B}{2},$$

$$\angle B'A'C = \angle A'B'C = 90^\circ - \frac{C}{2}, \quad \angle C'B'A = \angle B'C'A = 90^\circ - \frac{A}{2}.$$

$$\angle C'A'B' = 90^\circ - \frac{A}{2}, \quad \angle A'B'C' = 90^\circ - \frac{B}{2}, \quad \angle A'C'A' = 90^\circ - \frac{C}{2}.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle AB'C'$:

$$\frac{\overline{B'C'}}{\sin A} = \frac{\overline{AC'}}{\sin\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right)}. \quad \overline{B'C'} = \overline{AC'} \cdot 2 \sin \frac{A}{2}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle C'HB'$.

$$\overline{C'H} = \overline{B'C'} \cos\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right) = \overline{AC'} \cdot 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}.$$

$$\frac{\overline{C'H}}{\overline{AC'}} = 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}.$$

$$\text{Anàlogament, } \frac{\overline{A'H}}{\overline{CA'}} = 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}.$$

Aleshores, els triangles $\triangle AC'H$, $\triangle CA'H$ són semblants. Aleshores:

$$\angle AHC' = \angle CHA'.$$

Com que $B'H$ és perpendicular a $A'C'$:

$$\angle AHB' = \angle CHB', \text{ aleshores, } HB' \text{ és bisectriu de l'angle } \angle AHC.$$

