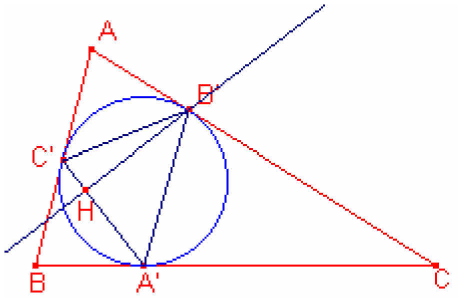
Problema 712

Sea el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ y sea A', B', y C' los puntos de contacto de la circunferencia inscrita opuestos a A, B, y C respectivamente.
Sea H el pie de la perpendicular a $\overline{A'C'}$ de B'.
Demostrar que HB' es bisectriz del ángulo $\angle AHC$.

Solución de Ricard Peiró:



$\overline{AB'} = \overline{AC'} = \dfrac{b+c-a}{2}$, $\overline{BA'} = \overline{BC'} = \dfrac{a+c-b}{2}$,

$\overline{CA'} = \overline{CB'} = \dfrac{a+b-c}{2}$.

Entonces, $\angle C'A'B = \angle A'C'B = 90º - \dfrac{B}{2}$,

$\angle B'A'C = \angle A'B'C = 90º - \dfrac{C}{2}$, $\angle C'B'A = \angle B'C'A = 90º - \dfrac{A}{2}$.

$\angle C'A'B' = 90º - \dfrac{A}{2}$, $\angle A'B'C' = 90º - \dfrac{B}{2}$, $\angle A'C'A' = 90º - \dfrac{C}{2}$.

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{AB'C'}$:

$\dfrac{\overline{B'C'}}{\sin A} = \dfrac{\overline{AC'}}{\sin\left(90º - \dfrac{A}{2}\right)}$. $\overline{B'C'} = \overline{AC'} \cdot 2\sin\dfrac{A}{2}$.

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{C'HB'}$.

$\overline{C'H} = \overline{B'C'}\cos\left(90º - \dfrac{C}{2}\right) = \overline{AC'} \cdot 2\sin\dfrac{A}{2} \cdot \sin\dfrac{C}{2}$.

$\dfrac{\overline{C'H}}{\overline{AC'}} = 2\sin\dfrac{A}{2} \cdot \sin\dfrac{C}{2}$.

Análogamente, $\dfrac{\overline{A'H}}{\overline{CA'}} = 2\sin\dfrac{A}{2} \cdot \sin\dfrac{C}{2}$.

Entonces, los triángulos $\overset{\Delta}{AC'H}$, $\overset{\Delta}{CA'H}$ son semejantes. Entonces:
$\angle AHC' = \angle CHA'$.
Como B'H es perpendicular a A'C':
$\angle AHB' = \angle CHB'$, entonces, es bisectriz del ángulo $\angle AHC$.