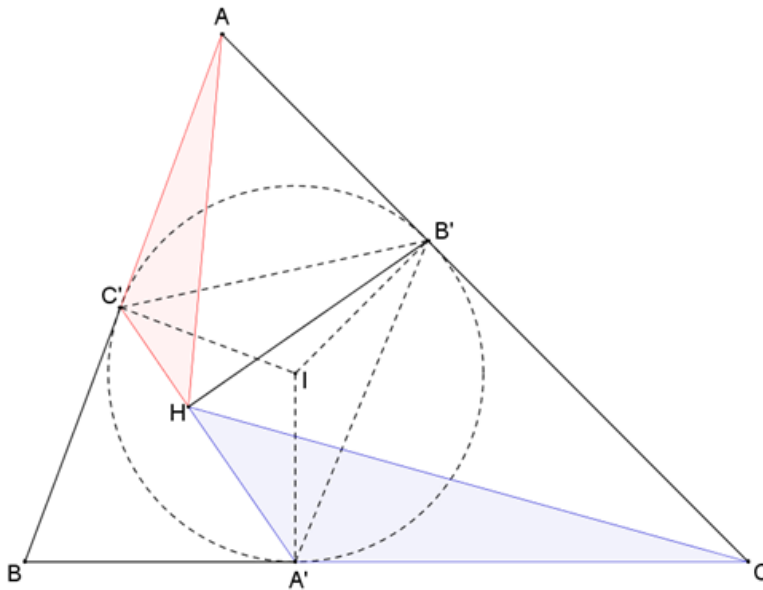


Problema 712

Sea ABC un triángulo y sea A' , B' , y C' son los puntos de contacto de la circunferencia inscrita opuestos a A , B , y C , respectivamente. Sea H el pie de la perpendicular a $A'C'$ de B' . Demostrar que HB' es bisectriz del ángulo AHC .

Jay Warendorff (2012): <http://demonstrations.wolfram.com/AnAngleBisection/>

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



On désigne par :

$2\alpha = \angle BAC$, $2\beta = \angle CBA$ et par $2\gamma = \angle ACB$ avec $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ$.

r le rayon du cercle inscrit de centre I avec $IA' = IB' = IC' = r$.

Lemme : les triangles AHC' et CHA' sont semblables

En effet :

$$\angle A'C'B = \angle C'A'B = 90^\circ - \beta.$$

Donc $\angle AC'A' = \angle CA'C' = 90^\circ + \beta$ ou encore $\angle AC'H = \angle CA'H$

$$\angle AC'B' = 90^\circ - \alpha.$$

Donc $\angle HC'B' = \angle A'C'B' = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - (90^\circ - \beta) = \alpha + \beta = 90^\circ - \gamma$.

De la même manière $\angle HA'B' = 90^\circ - \alpha$.

Par ailleurs :

$$r / AC' = \tan(\alpha) \text{ et } r / CA' = \tan(\gamma),$$

$$HC' / HB' = \cot(\angle HC'B') = \tan(\gamma) \text{ et } HA' / HB' = \cot(\angle HA'B') = \tan(\alpha)$$

Donc $HA' / HC' = \tan(\alpha) / \tan(\gamma)$ et $CA' / AC' = \tan(\alpha) / \tan(\gamma)$.

D'où $HA' / HC' = CA' / AC'$. C.q.f.d.

La similitude des triangles AHC' et CHA' entraîne $\angle AHC' = \angle CHA'$.

D'où $\angle BHA = 90^\circ - \angle AHC' = \angle CHA = 90^\circ - \angle CHA'$.

BH est donc la bissectrice de l'angle AHC .