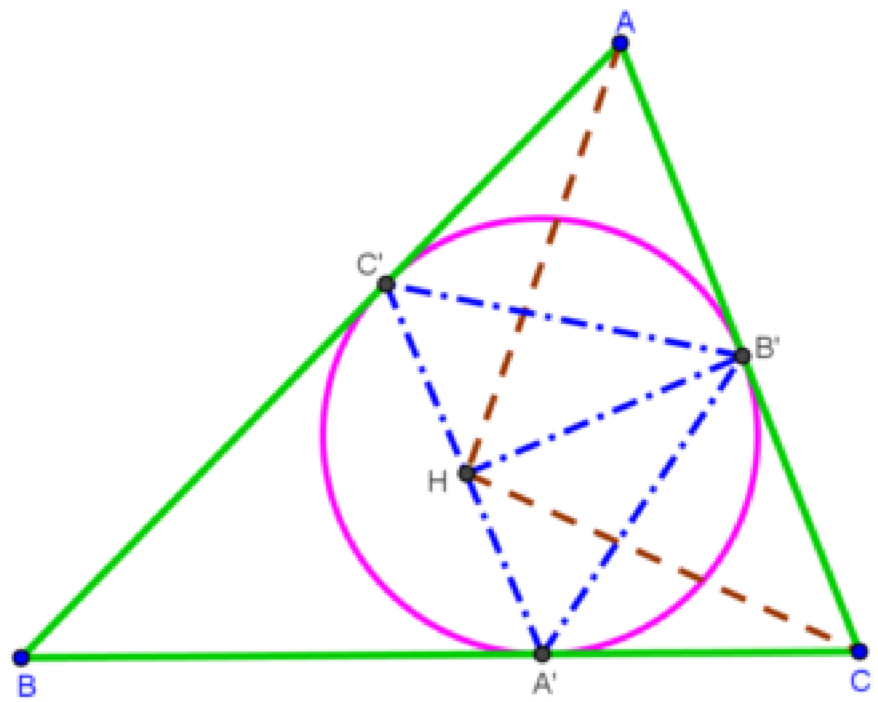
712.- *Sea ABC un triángulo y sea A ', B', y C 'son los puntos de contacto de la circunferencia inscrita opuestos a A, B, y C, respectivamente. Sea H el pie de la perpendicular a A'C' de B'. Demostrar que HB' es bisectriz del ángulo AHC.*



Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Según el teorema de la bisectriz bastará demostrar que $\frac{HA}{HC} = \frac{AC'}{CA'} = \frac{s-a}{s-c}$.

$A'B'C'$ es el triángulo de contacto interior. Como los triángulos $A'BC'$ y $A'CB'$ son isósceles, resulta que $\measuredangle C'A'B' = 90 - A/2$ y el lado $a' = B'C' = 2(s-a)sen\left(\frac{A}{2}\right)$. Expresiones análogas para el resto de ángulos y lados.

Queremos ver que son semejantes los triángulos $AC'H$ y $CA'H$, pues en ese caso tendríamos $\frac{AH}{CH} = \frac{AC'}{CA'} = \frac{s-a}{s-c}$.

El ángulo en C' del triángulo $AC'H$ y el ángulo en A' de $CA'H$ son iguales como suplementarios de los ángulos iguales del triángulo isósceles $BA'C'$. Sólo queda ver que los lados son proporcionales.

La altura sobre $b' = A'C'$ mide $B'H = a'sen(C') = c'sen(A')$. Aplicando el teorema de Pitágoras $C'H = a'cos(C') = a'sen(C/2)$. Análogamente $A'H = c'sen(A/2)$.

De ahí $\frac{C'H}{A'H} = \frac{a'sen\left(\frac{C}{2}\right)}{c'sen\left(\frac{A}{2}\right)} = \frac{s-a}{s-c} = \frac{AC'}{CA'}$.

■