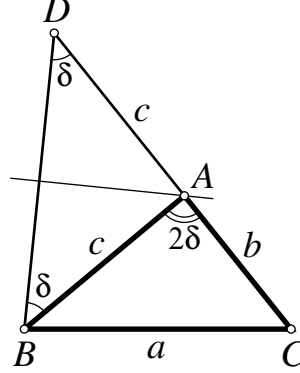


Problema 713a de triángulos cabri. *Construir un triángulo, conociendo a , A y $b + c$.*

Propuesto por César Beade Franco

Solución de Francisco Javier García Capitán



Construcción. Suponiendo construido el triángulo ABC , prolongamos el lado CA hasta un punto D tal que $AD = c$ y unimos D con B . El triángulo ADB es isósceles. Como consecuencia ADB , tendremos que $\angle ADB = \frac{1}{2}A$. Entonces, fijado el segmento BC de longitud a , el punto D que da determinado como intersección de dos lugares geométricos: el arco capaz del segmento a para el ángulo $\frac{1}{2}A$ y la circunferencia de centro C y radio $b + c$.

Una vez obtenido el punto D , teniendo en cuenta de nuevo que el triángulo ADB es isósceles, obtendremos el punto A como intersección del lado CD con la mediatriz del segmento BD .

Discusión Para que exista el punto D es necesario que el arco capaz del segmento a para el ángulo $\frac{1}{2}A$ tenga intersección con la circunferencia de centro C y radio $b + c$. Puede comprobarse que esto ocurrirá cuando

$$\cos A \geq \frac{(b + c)^2 - 2a^2}{(b + c)^2}.$$

Para ello, llamamos $\alpha = \frac{1}{2}A$ y $s = b + c$ y entonces debemos discutir la soluciones del sistema

$$\begin{cases} x^2 + \left(y - \frac{a}{2 \tan \alpha}\right)^2 = \left(\frac{a}{2 \sin \alpha}\right)^2 \\ \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = s^2 \end{cases}$$

Una vez simplificado, el discriminante de la ecuación de segundo grado resultante es $8a^2s^2 \csc^2 \alpha (2a^2 - s^2 + s^2 \cos(2\alpha))$.

- Por tanto, para construir el triángulo ABC ,
1. Fijamos un segmento BC de longitud a .
 2. Determinamos el punto D , que estará en el arco capaz del segmento BC para el ángulo $90^\circ - \frac{A}{2}$ y en la circunferencia de centro B y radio $b - c$.
 3. Determinamos el punto A , que estará en el arco capaz del segmento BC para el ángulo A y en la mediatriz del segmento CD .