

Problema 713

Propuesto por César Beade Franco, I. E. S. Fernando Blanco, Cee, A Coruña.

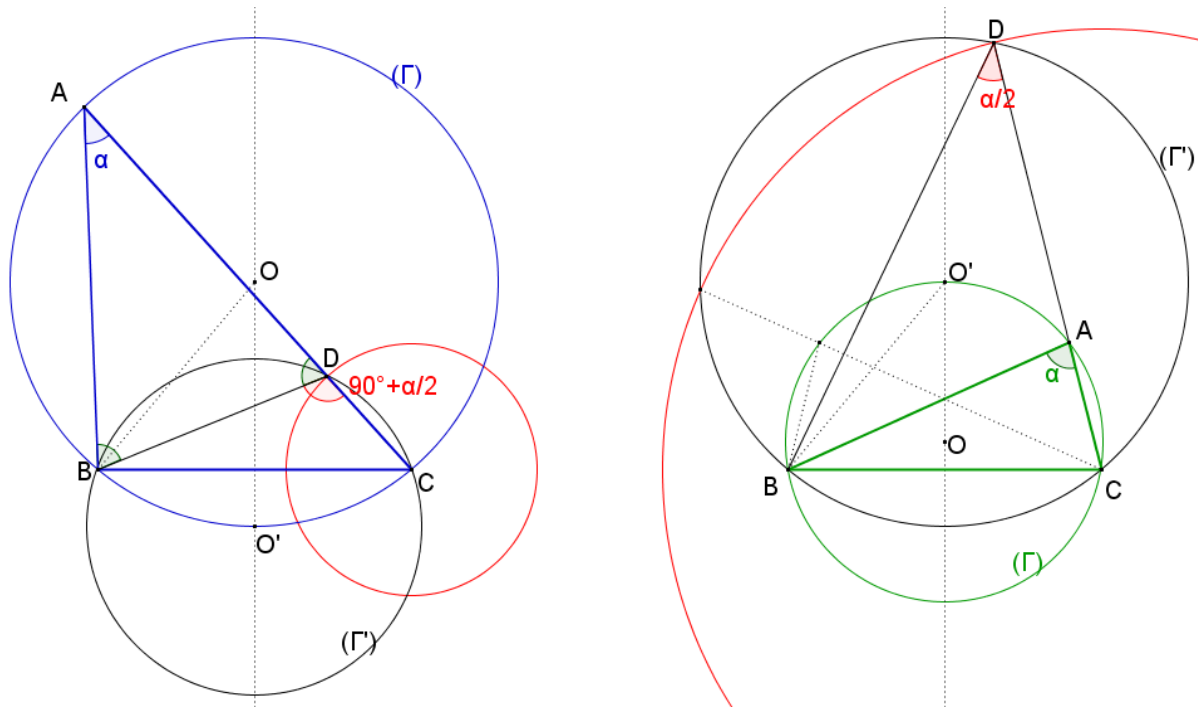
Construir un triángulo conocidos:

A. a , A y $b-c$.

B. a , A y $b+c$.

Beade, C. (2014): Comunicación personal.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



1^{er} cas : on connaît $BC = a$, $\alpha = \angle BAC$ et $BC - AC = b - c$

Le sommet A se trouve sur l'arc de cercle sous-tendu par la corde BC tel que $\angle BAC = \alpha$.

Soit (Γ) le cercle circonscrit à ABC qui porte cet arc de cercle.

On suppose $b > c$. Soit D sur AC tel que $AB = AD$. Le triangle ABD étant isocèle, on en déduit $\angle BDC = 180^\circ - \angle ADB = 180^\circ - (90^\circ - \alpha/2) = 90^\circ + \alpha/2$.

Le point D est alors à l'intersection du cercle de centre C et de rayon $b - c$ avec l'arc de cercle sous-tendu par la corde BC tel que $\angle BDC = 90^\circ + \alpha/2$. Soit O' le milieu du petit arc BC. Comme $\angle BO'C = 180^\circ - \alpha$ et $\angle BDC = 180^\circ - \angle BO'C/2 = 180^\circ - 90^\circ + \alpha/2 = 90^\circ + \alpha/2$, le cercle (Γ') qui porte cet arc de cercle a pour centre O' et pour rayon $O'B = O'C$.

La construction du triangle ABC se fait ainsi en trois étapes :

- 1) construction du cercle (Γ) ,
- 2) construction du cercle (Γ') et du cercle de centre C et de rayon $b - c$ qui se coupent en D,
- 3) la droite CD coupe le cercle (Γ) en A.

2^{ème} cas : on connaît $BC = a$, $\alpha = \angle BAC$ et $AC + CB = b + c$

Comme précédemment, A se trouve sur le cercle (Γ) qui porte l'arc de cercle d'où l'on voit la corde BC sous l'angle α . L'angle en D est tel que $\angle BDC = \alpha/2$.

La construction du triangle ABC se fait à nouveau en trois étapes :

- 1) construction du cercle (Γ) ,
- 2) construction du cercle (Γ') de centre O' milieu du grand arc BC sur (Γ) et de rayon $O'B = O'C$ et du cercle de centre C et de rayon $b + c$ qui se coupent en D.
- 3) la droite CD coupe le cercle (Γ) en A.