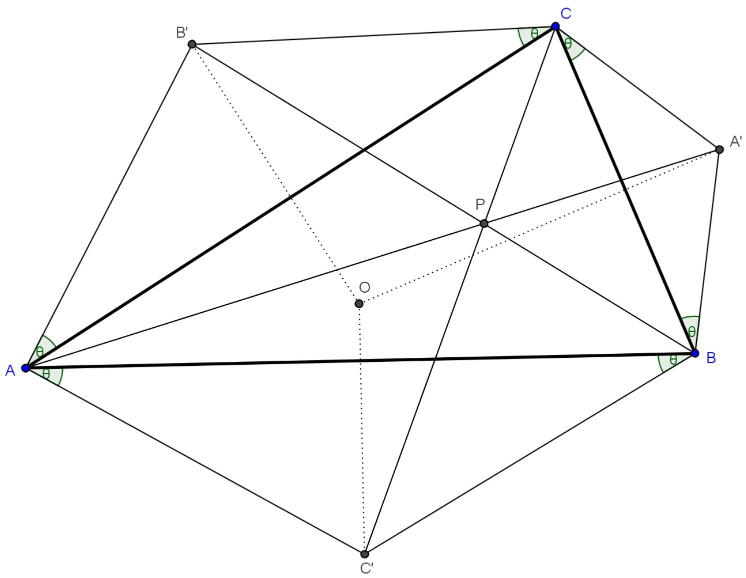
Solución al Problema 714
propuesto en Triángulos Cabri
quincena del 16 al 30 de junio de 2014

enviada por
Andrea Fanchini
Cantú,
Italia.

Junio 16, 2014

Problema 714. *César Beade Franco, I. E. S. Fernando Blanco, Cee, A Coruña.*
Dado un triángulo ABC, construímos puntos A', B' y C' tales que los triángulos $A'BC$, $B'CA$ y $C'AB$ son isósceles, semejantes y con la misma orientación.
A. Demostrar que los segmentos AA', BB' y CC' convergen en un punto P.
B. Encontrar la curva que describe P al variar los puntos A', B' y C'.
Leversha, G. (2013): The geometry of the triangle theorem 11.4, (p. 147).

Solución 714. *(Andrea Fanchini, Cantú, Italia)*



A.
Usando la fórmula de Conway [1, §2.2] y si θ es el ángulo común, las coordenadas de los puntos A', B' y C' serán

$$A'(-a^2 : S_C + S_\theta : S_B + S_\theta) \quad ; \quad B'(S_C + S_\theta : -b^2 : S_A + S_\theta) \quad ; \quad C'(S_B + S_\theta : S_A + S_\theta : -c^2)$$

que podemos poner en la siguiente forma

$$A'\left(*** : \frac{1}{S_B + S_\theta} : \frac{1}{S_C + S_\theta}\right) \quad ; \quad B'\left(\frac{1}{S_A + S_\theta} : *** : \frac{1}{S_C + S_\theta}\right) \quad ; \quad C'\left(\frac{1}{S_A + S_\theta} : \frac{1}{S_B + S_\theta} : ***\right)$$

(dónde * * * significa que los valores de las coordenadas no son importantes).
Entonces los triángulos ABC y $A'B'C'$ son perspectivos. Por tanto los segmentos AA', BB' y CC' convergen en un punto P. q.e.d.
Esto punto tiene coordenadas $P\left(\frac{1}{S_A+S_\theta} : \frac{1}{S_B+S_\theta} : \frac{1}{S_C+S_\theta}\right)$ y es conocido como *centro de perspectividad de Kiepert*.

Referencias

[1] Francisco J. García Capitán, *Coordenadas Baricéntricas.*
http://garciacapitan.99on.com/baricentricas/

B.
Todos los centros de perspectividad de Kiepert satisfacen las ecuaciones

$$kx = \frac{1}{S_A + S_\theta} \quad ; \quad ky = \frac{1}{S_B + S_\theta} \quad ; \quad kz = \frac{1}{S_C + S_\theta}$$

Por tanto eliminando k y S_θ se puede conseguir la ecuación del lugar geométrico.
Tenemos que

$$k = \frac{1}{S_A x + S_\theta x} = \frac{1}{S_B y + S_\theta y} = \frac{1}{S_C z + S_\theta z}$$

Por tanto

$$\begin{array}{l} S_\theta(x-y) = S_B y - S_A x \\ \\ S_\theta(y-z) = S_C z - S_B y \end{array} \quad \Rightarrow \quad (x-y)(S_C z - S_B y) = (y-z)(S_B y - S_A x)$$

substituyendo a S_A, S_B y S_C sus expresiones se obtiene

$$(b^2-c^2)yz + (c^2-a^2)zx + (a^2-b^2)xy = 0$$

que es la ecuación del lugar conocido como *hipérbola de Kiepert*.