Pr. Cabri 714
por César Beade Franco

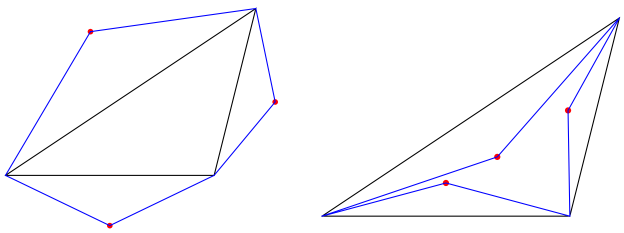
Enunciado

Dado un triángulo ABC, construímos puntos A', B' y C' tales que los triángulos A'BC, B'CA y C'AB son isósceles, semejantes y con la misma orientación.
A. Demostrar que los segmentos AA', BB' y CC' convergen en un punto P.
B. Encontrar la curva que describe P al variar los puntos A', B' y C'.

Solución

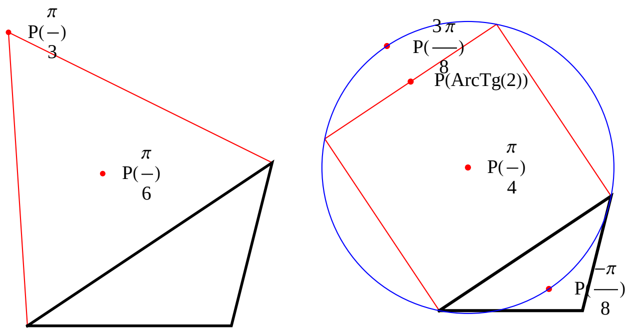
A. Dado un triángulo ABC de lados a, b, c, sobre la mediatriz de cada lado construímos puntos A', B', C', tales que sus distancias al respectivo lado son proporcionales a los lados. Esto equivale a construir triángulos isósceles semejantes sobre cada lado lado del triángulo. Lo aclara el próximo dibujo. Para cada triángulo hay 6 de éstos puntos, 3 "hacia fuera" y 3 "hacia dentro" que llamaré isovértices.

Dibujo 1



Para costruir el punto A' giramos el lado AB un ángulo α alrededor de A y lo mismo hacemos para obtener B' y C'.
Con $\alpha \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ se obtienen todos los triángulos. Si $\alpha > 0$, "hacia fuera" y si $\alpha < 0$, "hacia dentro".
En el próximo dibujo vemos varios isovértices relacionados con polígonos regulares construídos sobre el triángulo.

Dibujo 2

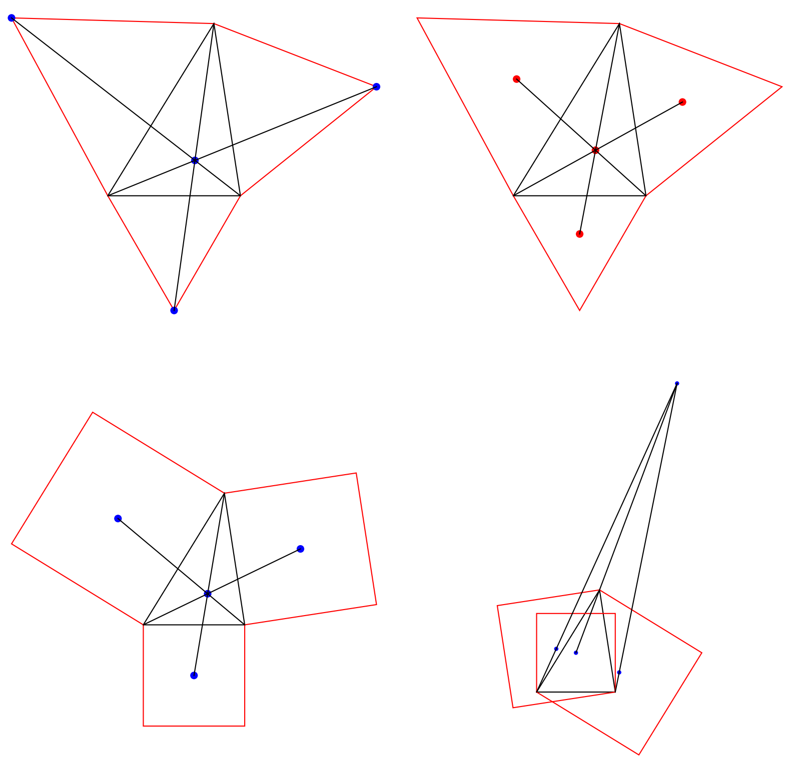


Y ahora generalizamos una propiedad de la que son conocidos casos particulares.
Dado un triángulo ABC y 3 isovértices A', B' y C', dependientes de un ángulo α. Los segmentos AA', BB' y CC' convergen en un punto para cualquier valor de α. A este punto le llamaré punto de Fermat generalizado, F_α o F(α).
Lo demostraremos para un triángulo T0 (1) por cálculo directo. Para ello calculamos $AA' \cap BB'$ y $AA' \cap CC'$ constatando que son el mismo punto. Tal punto tiene de coordenadas en función de (a,b) y α,

$$F_\alpha = \left(\frac{(b + a\,\mathrm{Tan}[\alpha])\,(1 + a + b\,\mathrm{Tan}[\alpha])}{3\,b + 2\,\left(1 + (-1 + a)\,a + b^2\right)\,\mathrm{Tan}[\alpha] + b\,\mathrm{Tan}[\alpha]^2},\ \frac{(b + \mathrm{Tan}[\alpha] - a\,\mathrm{Tan}[\alpha])\,(b + a\,\mathrm{Tan}[\alpha])}{3\,b + 2\,\left(1 + (-1 + a)\,a + b^2\right)\,\mathrm{Tan}[\alpha] + b\,\mathrm{Tan}[\alpha]^2} \right).$$

Para ciertos valores de α tenemos puntos conocidos. Así para $\alpha = \pm\frac{\pi}{3}$ son los clásicos puntos de Fermat, para $\alpha = \pm\frac{\pi}{4}$ los puntos de Vecten y para $\alpha = \pm\frac{\pi}{6}$ los de Napoleón.

Dibujo 3



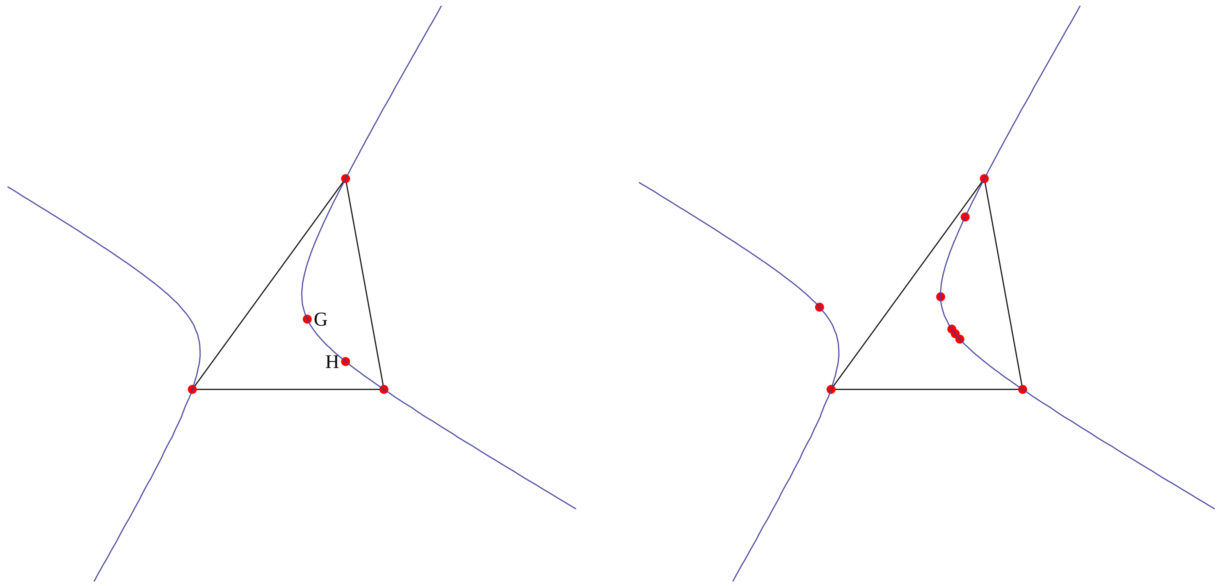
B. La anterior expresión de F_α la podemos considerar como el lugar geométrico que describen dichos puntos al variar α. Eliminando α se obtiene su ecuación implícita:

$$(-1 + 2\,a)\,b\,x^2 + x\left(b - 2\,a\,b - 2\,y + 2\,a\,y - 2\,a^2\,y + 2\,b^2\,y\right) == y\left(-a - a^2 + b^2 - b\,y + 2\,a\,b\,y\right)$$

Esta curva es una cónica que pasa por A, B y C (2). Pasa también por el baricentro y ortocentro de ABC pues $\lim_{\alpha\to 0} F_\alpha = \left(\frac{1+a}{3}, \frac{b}{3}\right)$ = G y $\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}} F_\alpha = \left(a, -\frac{(-1+a)\,a}{b}\right)$ = H. El hecho de que pase por el otocentro nos indica que esta cónica es una hipérbola equilátera y como pasa por G sabemos que es la hipérbola de Kiepert.

Dibujo 4

Out[212]=



Ya comentamos que esta hipérbola pasa por H, G y los F(α). Pasa también por el punto de Spieker (3) que sin embargo no es un F(α) pues el valor de α varía para cada triángulo.

Apéndice

Los centros de cualquier polígono regular construído sobre los lados son isovértices para algún α. Tienen coordenadas $A' = \left(\frac{1+a}{2} + \frac{1}{2}\, b \operatorname{Tan}[\alpha],\ \frac{b}{2} + \frac{1}{2}(1-a)\operatorname{Tan}[\alpha]\right)$, $B' = \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\, b \operatorname{Tan}[\alpha],\ \frac{b}{2} + \frac{1}{2}\, a \operatorname{Tan}[\alpha]\right)$ y $C' = \left(\frac{1}{2},\ -\frac{\operatorname{Tan}[\alpha]}{2}\right)$.

El área (con signo) de este triángulo viene dada por $\Delta E = \frac{1}{8}\left(b + 2\left(1 - a + a^2 + b^2\right)\operatorname{Tan}[\alpha] + 3\, b \operatorname{Tan}[\alpha]^2\right)$ y si cambiamos el ángulo por $-\alpha$ se obtiene $\Delta I = \frac{1}{8}\left(b - 2\left(1 - a + a^2 + b^2\right)\operatorname{Tan}[\alpha] + 3\, b \operatorname{Tan}[\alpha]^2\right)$. $\Delta E + \Delta I = \frac{1}{4}\left(b + 3\, b \operatorname{Tan}[\alpha]^2\right)$. Como $(ABC) = \Delta = \frac{b}{2}$, tenemos que $\Delta E + \Delta I = \left(\frac{3 \operatorname{Sec}[\alpha]^2}{2} - 1\right)\Delta$ (4), que solo depende de α.

Para los triángulos de Napoleón $\alpha = \frac{\pi}{6}$ y $\Delta E + \Delta I = \Delta$ y si $\alpha = \frac{\pi}{4}$, los polígonos son cuadrados y $\Delta E + \Delta I = 2\Delta$.

Notas

(1) Triángulo de vértices A (0,0), B (1,0) y C (a,b).

(2) Se puede llegar a esa conclusión mediante un argumento "simétrico". Esta cónica pasa por el vértice (0,0), al no tener término independiente. Pero dado un triángulo cualquiera este es semejante a otro T0 tomando como origen cualquiera de sus vértices.

(3) Este punto es el incentro del triángulo medial. También lo es de la circunferencia de puntos dobles de los tres exincírculos, es decir, es su centro radical.

(4) Como las áreas que calculamos tienen signo y los triángulos napoleónicos tienen distinta orientación, los valores de las áreas ΔE y ΔI tienen distinto signo, de ahí que las sumemos. Si tomamos las áreas siempre positivas, entonces hay que restarlas.