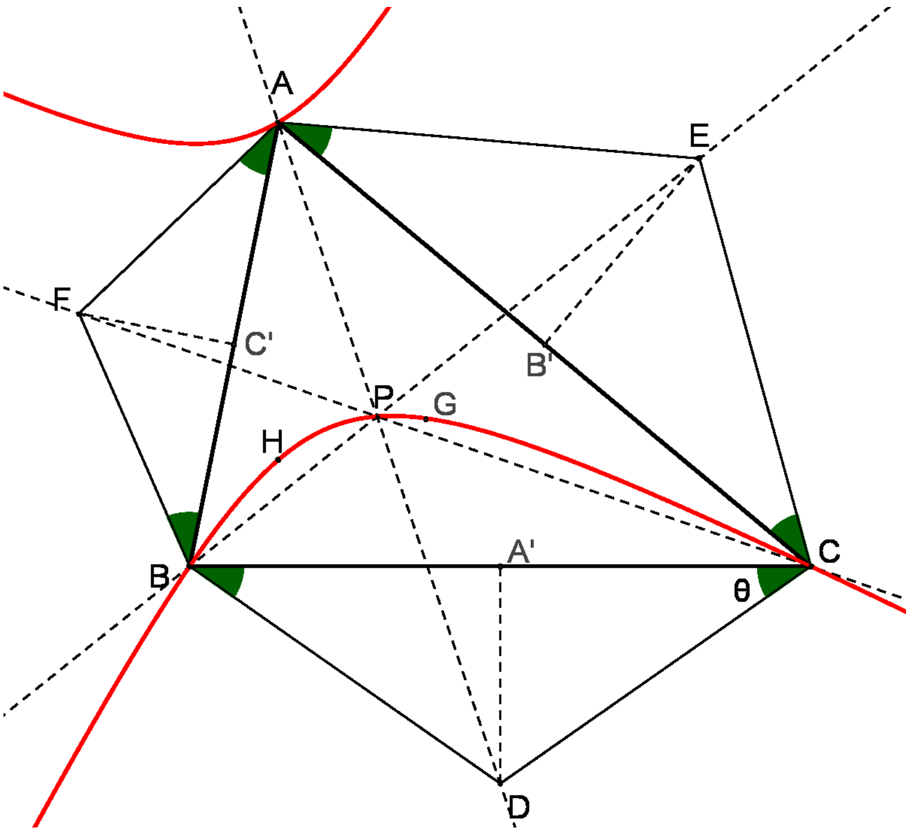
Problema n°714
Propuesto por César Beade Franco, I. E. S. Fernando Blanco, Cee, A Coruña.
Dado un triángulo ABC, construímos puntos A', B' y C' tales que los triángulos A'BC, B'CA y C'AB son isósceles, semejantes y con la misma orientación.
A. Demostrar que los segmentos AA', BB' y CC' convergen en un punto P. Leversha, G. (2013): The geometry of the triangle theorem 11.4, (p. 147)
B. Encontrar la curva que describe P al variar los puntos A', B' y C'.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche
Ce problème a donné lieu à de nombreuses analyses sur le thème du théorème de Napoléon et ses généralisations.
Nous donnons une solution - parmi bien d'autres - qui repose sur les **nombres complexes**.

Question A



On désigne par a,b et c les affixes des sommets A,B et C dans le plan complexe. En d'autres termes on a $a = a_x + i a_y$, $b = b_x + i b_y$ et $c = c_x + i c_y$ avec $i^2 = -1$

Soient A',B' et C' les milieux des côtés BC,CA et AB. L'affixe de A' est a' = (b + c)/2.
Soit D le sommet du triangle isocèle de base BC tel que angle $\angle$BCD = θ commun aux trois triangles isocèles BCD,CAE et ABF.
L'affixe de D est d = λi (b – c) + (b + c)/2 avec λ nombre réel = tan(θ)/2 et le nombre imaginaire i qui détermine la rotation d'angle π/2 dans le sens anti-horaire.
On en déduit d = (1/2 + λi)b + (1/2 – λi)c.
Soit P le point d'intersection des droites AD et BE d'affixe p.
On exprime dans un premier temps le fait que P appartient à la droite AD. On a p = a + μ (d – a) avec μ nombre réel quelconque.
D'où p = a(1 – μ) + μ((1/2 + λi)b + (1/2 – λi)c).

On peut choisir sans perte de généralité le système de coordonnées de sorte que P en est l'origine.
D'où le système de deux équations :
$2(1/\mu - 1)a_x + b_x - 2\lambda b_y + c_x + 2\lambda c_y = 0$
$2(1/\mu - 1)a_y + 2\lambda b_x + b_y - 2\lambda c_x + c_y = 0$
Par élimination dees termes en μ, on obtient la relation :
$a_y b_x - 2\lambda a_y b_y + a_y c_x + 2\lambda a_y c_y = 2\lambda a_x b_x + a_x b_y - 2\lambda a_x c_x + a_x c_y$
Cette même équation peut être écrite en permutant les lettres a,b et c pour exprimer le fait que P appartient à BE tout en étant à l'origine..
On obtient la deuxième relation :
$b_y c_x - 2\lambda b_y c_y + b_y a_x + 2\lambda b_y a_y = 2\lambda b_x c_x + b_x c_y - 2\lambda b_x a_x + b_x a_y$
En sommant les deux relations et en mettant les termes en c_x dans le second membre et les termes en c_y dans le premier,on obtient la relation:
$c_y a_x - 2\lambda c_y a_y + c_y b_x + 2\lambda c_y a_y = 2\lambda c_x a_x + c_x a_y - 2\lambda c_x b_x + c_x b_y$.
Cette équation prouve que le point P appartient à CF tout en étant à l'origine.
Il en découle que les droites AD,BE et CF se coupent au point P, origine du système de coordonnées choisi.

Question B

Sans perte de généralité on retient un système de coordonnées dans lequel B est à l'origine (0,0), les points A et C ont respectivement pour coordonnées ($a_x = s$,1) et (1,0).
Avec les points A, D et E d'affixes respectives $a = s + i$, $d = 1/2 - \lambda i$ et $e = \lambda i(1 - a) + (1 + a)/2$, on déduit les équations des droites AD et BE à savoir :
$y = 2(1-\lambda)x/(2s-1) + (2\lambda s-1)/(2s-1)$
e
t $y = (1 - 2\lambda + 2\lambda s)x/(1 + s - 2\lambda)$
Par élimination du terme λ, on obtient une équation du second degré en x et y.
$\mathbf{x^2 + k_1xy - y^2 - x + k_2y = 0}$ avec $k_1 = 2s(s-1)/(1 - 2s)$ et $k_2 = (1 - s - s^2)/(1 - 2s)$.
On reconnaît l'équation d'une conique qui a les propriétés suivantes:

- c'est une hyperbole équilatère,
- elle passe par les sommets A,B et C,
- elle passe par le centre de gravité $G((s+1)/3, 1/3)$ et par l'orthocentre $H(s, s - s^2)$ du triangle ABC.