

Problema 714.- Dado un triángulo ABC , construimos puntos A' , B' y C' tales que los triángulos $A'BC$, $B'CA$ y $C'AB$ son isósceles, semejantes y con la misma orientación.

A. Demostrar que los segmentos AA' , BB' y CC' convergen en un punto P .

Leversha, G. (2013): The geometry of the triangle theorem 11.4, (p. 147)

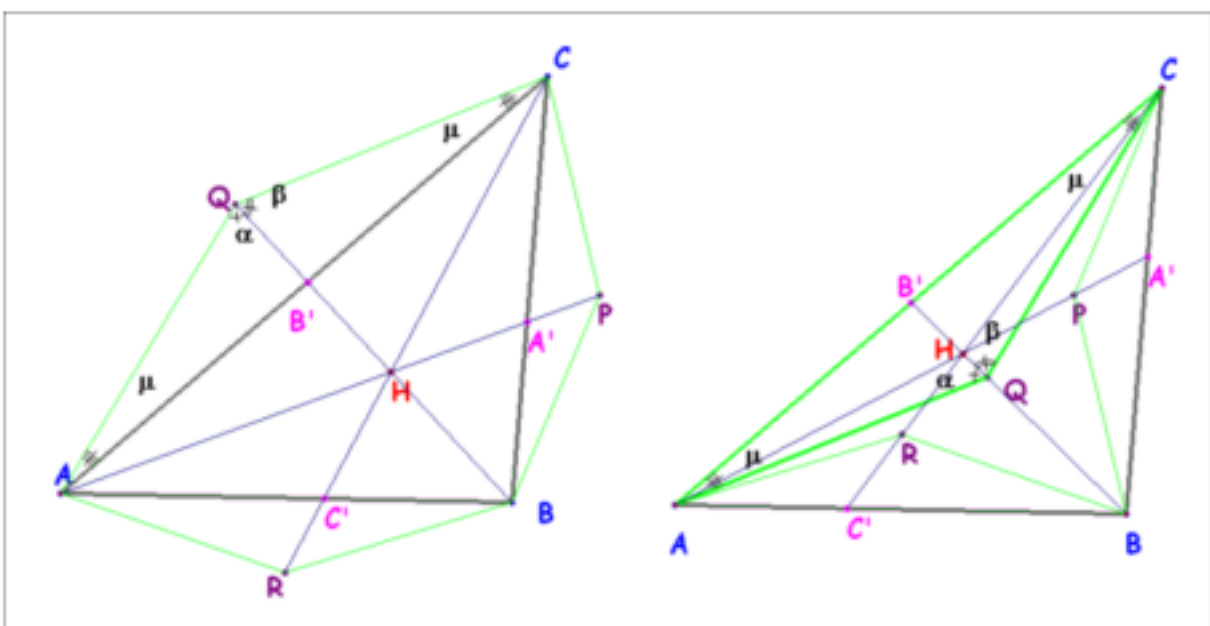
B. Encontrar la curva que describe P al variar los puntos A' , B' y C' .

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

A) El asunto ya fue tratado en el problema nº 93 de esta revista, con un enunciado distinto. Prácticamente, en su primera parte, vamos a repetir lo que se hizo allí.

Los triángulos isósceles semejantes y con la misma orientación, podemos tomarlo eligiendo el vértice que no está sobre ABC hacia el exterior del mismo o hacia el interior. En el problema aludido sólo hablábamos de triángulos con el vértice dirigido hacia el exterior.

Tomamos la notación usada allí P , Q y R en vez de A' , B' y C' y H para el punto de encuentro.



Vamos a calcular el valor del cociente $\frac{CB'}{B'A}$. Las áreas de los triángulos con igual altura son proporcionales a las bases, por tanto, el cociente anterior es igual a la razón de las áreas de los triángulos $B'QC$ y $B'QA$.

Si tomamos como bases los lados QC y QA respectivamente, tendremos: $\text{Área}(B'QA) = \frac{1}{2} \cdot QB' \cdot QA \cdot \sin \alpha$; y $\text{Área}(B'QC) = \frac{1}{2} \cdot QB' \cdot QC \cdot \sin \beta$; pero como $QA = QC$, se tiene, en resumen:

$$\frac{\text{Área}(BQC)}{\text{Área}(BQB)} = \frac{CB'}{B'A} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}.$$

En los triángulos QBA y QBC con QB como lado común, aplicando el teorema de los senos tenemos: $\sin \alpha = \frac{c \cdot \sin(A + \mu)}{QB}$; $\sin \beta = \frac{a \cdot \sin(C + \mu)}{QB}$ para el primer caso,

y $\frac{QB}{\sin(A - \mu)} = \frac{AB}{\sin(180 - \alpha)}$; $\frac{QB}{\sin(C - \mu)} = \frac{BC}{\sin(180 - \beta)}$ para el segundo.

Sustituyendo $\sin \alpha$ y $\sin \beta$ en la razón entre las áreas resulta, finalmente:

$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{a \cdot \sin(C \pm \mu)}{c \cdot \sin(A \pm \mu)}.$$

Permutando convenientemente las letras A , B y C , se obtienen:

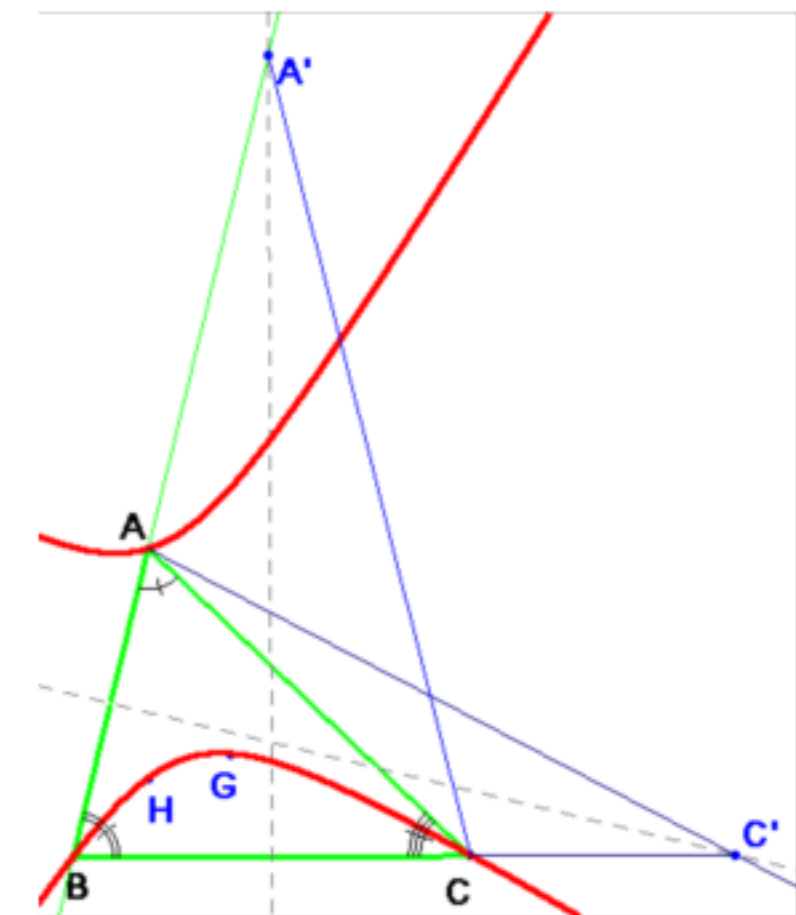
$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{b \cdot \sin(A \pm \mu)}{a \cdot \sin(B \pm \mu)} \quad \text{y} \quad \frac{BA'}{A'C} = \frac{c \cdot \sin(B \pm \mu)}{b \cdot \sin(C \pm \mu)}.$$

El producto de estas tres razones es:

$$\frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} = \frac{a \cdot \sin(C \pm \mu)}{c \cdot \sin(A \pm \mu)} \cdot \frac{b \cdot \sin(A \pm \mu)}{a \cdot \sin(B \pm \mu)} \cdot \frac{c \cdot \sin(B \pm \mu)}{b \cdot \sin(C \pm \mu)} = 1, \text{ que demuestra la concurrencia, según el teorema de Ceva.}$$

B) Retomando la notación original del problema, el punto de intersección de las cevianas viene definido al elegir uno de los puntos A' , B' o C' (evidentemente sobre la mediatriz del lado correspondiente).

- Veamos algunos puntos particulares de concurrencia de las cevianas:



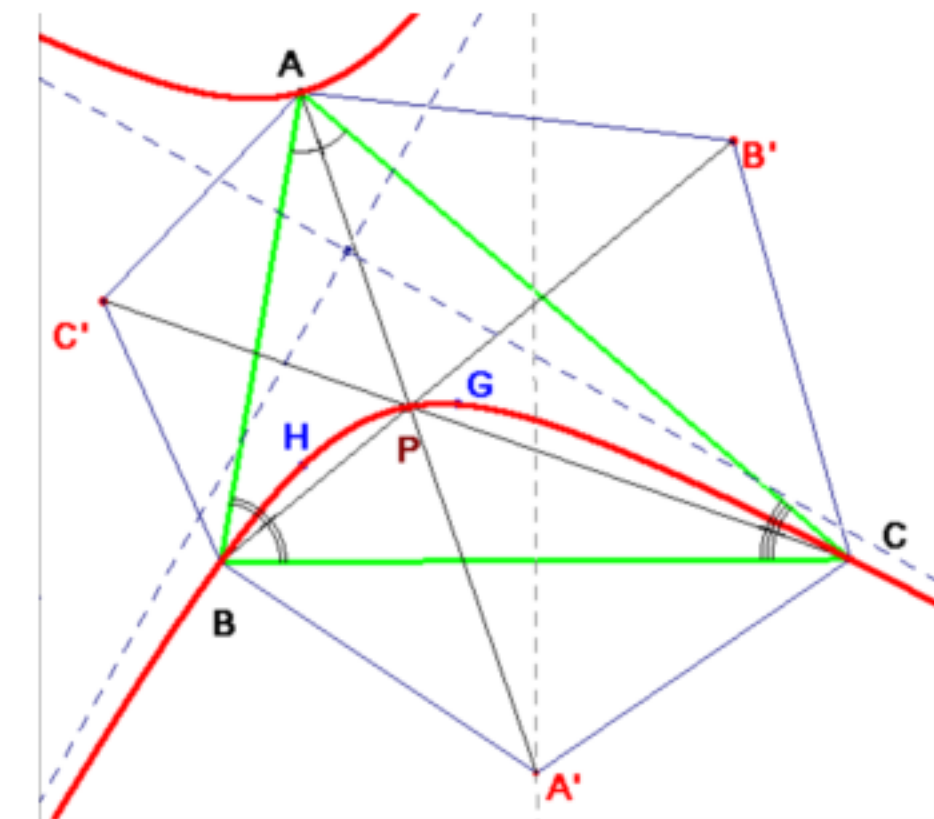
Si tomo A' sobre la mediatriz de BC , justo donde ésta encuentra al lado c , entonces los triángulos isósceles (hacia dentro) tienen como ángulo igual el B .

C' estará en la mediatriz de AB , cuando corte a la prolongación del lado BC . La recta CC' es el lado BC y la AA' el lado AB que se cortan en B . Así pues el vértice B es un punto del lugar. De forma análoga se demuestra que también A y C pertenecen al mismo.

Si se toma ahora A' en el punto medio de BC , el triángulo formado con esos puntos degenera en un segmento. AA' es una mediana y el punto de concurrencia es el baricentro del triángulo.

Tomando A' en el punto del infinito de la mediatriz (esto equivale a tener un triángulo isósceles degenerado con dos ángulos iguales de 90°), la recta AA' es la paralela a la mediatriz por A : es una altura y en consecuencia, el ortocentro del triángulo es otro de los puntos del lugar.

- Este lugar geométrico es una cónica: la hipérbola de Kiepert.



Sea r una recta del haz de rectas que pasa por A ; A' es su intersección con la mediatriz de BC . Por medio de una isometría (traslación y giro) se llevan las semirrectas BA' y BC sobre las semirrectas AB' y AC . Así queda definido B' por intersección con la mediatriz de AC y hemos asignado proyectivamente a la recta r del haz A^* , la recta $s = BB'$, del haz B^* .

El conjunto de los puntos así definido es una cónica, de la que sabemos que circunscribe al triángulo ABC y pasa por el ortocentro y el baricentro.

Es conocido que el conjunto de cónicas circunscritas a un triángulo y que pasan por su ortocentro son hipérbolas equiláteras; además su centro es un punto de la circunferencia de Euler (puede verse el problema 200 d sobre la cónica de los nueve puntos). De todas estas, la que pasa por el baricentro es conocida como la hipérbola

de Kiepert.

Para concluir, diremos que según la teoría isogonal, la circunferencia circunscrita a un triángulo es la transformada isogonal de la recta del infinito. De ahí que una cónica circunscrita a un triángulo pueda considerarse la transformada isogonal de una recta. Esta cónica será una hipérbola, parábola o elipse, según que su transformada isogonal corte a la circunferencia circunscrita en dos, uno o ningún punto respectivamente.

Es conocido que el baricentro y ortocentro son conjugados ortogonales del circuncentro y el simediano.

Dado que la hipérbola de Kiepert contiene al ortocentro y al baricentro entonces es la transformada ortogonal de una recta que pasa por el circuncentro y el simediano. Esta recta es un diámetro de la circunscrita, llamado **diámetro de Brocard**.