

Solución al Problema 715
propuesto en Triángulos Cabri
quincena del 16 al 30 de junio de 2014

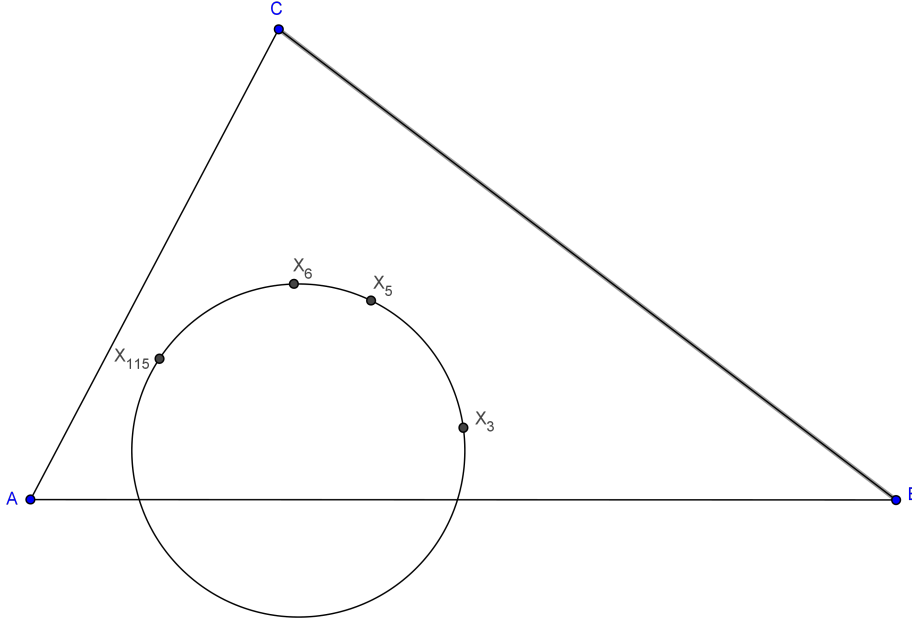
enviada por
Andrea Fanchini
Cantú,
Italia.

Junio 25, 2014

Problema 715. *José Montes Valderrama (2014)*

El circuncentro, el centro de la circunferencia de los nueve puntos, el punto de Lemoine, y el centro de la hipérbola de Kiepert son concíclicos.

Solución 715. *(Andrea Fanchini, Cantú, Italia)*



Las coordenadas baricéntricas de los puntos son $X_3(a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C)$, $X_5(S^2 + S_BS_C : S^2 + S_CS_A : S^2 + S_AS_B)$, $X_6(a^2 : b^2 : c^2)$ y $X_{115}((b^2 - c^2)^2 : (c^2 - a^2)^2 : (a^2 - b^2)^2)$.

La ecuación de la circunferencia que pasa por X_3 , X_6 y X_{115} es dada de

$$\begin{vmatrix} x(x+y+z) & a^2S_A(a^2S_A+b^2S_B+c^2S_C) & a^2(a^2+b^2+c^2) & 2(b^2-c^2)^2(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2) \\ y(x+y+z) & b^2S_B(a^2S_A+b^2S_B+c^2S_C) & b^2(a^2+b^2+c^2) & 2(c^2-a^2)^2(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2) \\ z(x+y+z) & c^2S_C(a^2S_A+b^2S_B+c^2S_C) & c^2(a^2+b^2+c^2) & 2(a^2-b^2)^2(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2) \\ a^2yz+b^2zx+c^2xy & a^2b^2c^2S^2 & 3a^2b^2c^2 & a^2(c^2-a^2)^2(a^2-b^2)^2+b^2(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)^2+c^2(b^2-c^2)^2(c^2-a^2)^2 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando

$$2S^2(a^2yz+b^2zx+c^2xy)(a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2) \begin{vmatrix} 2a^2S_A & a^2 & (b^2-c^2)^2 \\ 2b^2S_B & b^2 & (c^2-a^2)^2 \\ 2c^2S_C & c^2 & (a^2-b^2)^2 \end{vmatrix} +$$

$$-2a^2b^2c^2S^2(a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2)(x+y+z) \begin{vmatrix} x & a^2 & (b^2-c^2)^2 \\ y & b^2 & (c^2-a^2)^2 \\ z & c^2 & (a^2-b^2)^2 \end{vmatrix} +$$

$$6a^2b^2c^2S^2(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2)(x + y + z) \begin{vmatrix} x & 2a^2S_A & (b^2 - c^2)^2 \\ y & 2b^2S_B & (c^2 - a^2)^2 \\ z & 2c^2S_C & (a^2 - b^2)^2 \end{vmatrix} +$$

$$[-a^2(c^2 - a^2)^2(a^2 - b^2)^2 - b^2(a^2 - b^2)^2(b^2 - c^2)^2 - c^2(b^2 - c^2)^2(c^2 - a^2)^2](a^2 + b^2 + c^2)S^2(x + y + z) \begin{vmatrix} x & 2a^2S_A & a^2 \\ y & 2b^2S_B & b^2 \\ z & 2c^2S_C & c^2 \end{vmatrix} = 0$$

desarrollando y simplificando se consigue la ecuación de la circunferencia

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy + \frac{1}{2K}(x + y + z)(px + qy + rz)$$

dónde K , p , q y r son dados por el siguiente tablero,

K					p					q					r				
	coef	a	b	c		coef	a	b	c		coef	a	b	c		coef	a	b	c
+	1	0	2	14	-	1	0	2	16	+	1	2	0	16	-	3	2	4	12
-	3	0	4	12	+	2	0	4	14	-	5	2	2	14	+	11	2	6	10
+	3	0	6	10	-	3	0	8	10	+	13	2	4	12	-	19	2	8	8
-	3	0	10	6	+	3	0	10	8	-	20	2	6	10	+	20	2	10	6
+	3	0	12	4	-	2	0	14	4	+	19	2	8	8	-	13	2	12	4
-	1	0	14	2	+	1	0	16	2	-	11	2	10	6	+	5	2	14	2
-	1	2	0	14	+	5	2	2	14	+	3	2	12	4	-	1	2	16	0
-	3	2	4	10	-	7	2	4	12	-	2	4	0	14	+	3	4	2	12
+	8	2	6	8	+	4	2	6	10	+	7	4	2	12	-	1	4	6	8
-	8	2	8	6	-	4	2	10	6	-	9	4	4	10	-	4	4	8	6
+	3	2	10	4	+	7	2	12	4	+	4	4	6	8	+	9	4	10	4
+	1	2	14	0	-	5	2	14	2	+	1	4	8	6	-	7	4	12	2
+	3	4	0	12	-	13	4	2	12	-	3	4	12	2	+	2	4	14	0
+	3	4	2	10	+	9	4	4	10	-	4	6	2	10	-	11	6	2	10
-	3	4	10	2	-	5	4	6	8	+	5	6	4	8	+	1	6	4	8
-	3	4	12	0	+	5	4	8	6	-	1	6	8	4	-	5	6	8	4
-	3	6	0	10	-	9	4	10	4	+	11	6	10	2	+	4	6	10	2
-	8	6	2	8	+	13	4	12	2	+	3	8	0	10	+	19	8	2	8
+	8	6	8	2	+	20	6	2	10	-	5	8	4	6	+	4	8	4	6
+	3	6	10	0	-	4	6	4	8	-	4	8	6	4	+	5	8	6	4
+	8	8	2	6	+	4	6	8	4	-	19	8	8	2	-	3	8	10	0
-	8	8	6	2	-	20	6	10	2	-	3	10	0	8	-	20	10	2	6
+	3	10	0	6	-	19	8	2	8	+	4	10	2	6	-	9	10	4	4
-	3	10	2	4	-	1	8	4	6	+	9	10	4	4	-	4	10	6	2
+	3	10	4	2	+	1	8	6	4	+	20	10	6	2	+	3	10	8	0
-	3	10	6	0	+	19	8	8	2	-	7	12	2	4	+	13	12	2	4
-	3	12	0	4	+	11	10	2	6	-	13	12	4	2	+	7	12	4	2
+	3	12	4	0	-	11	10	6	2	+	2	14	0	4	-	5	14	2	2
+	1	14	0	2	-	3	12	2	4	+	5	14	2	2	-	2	14	4	0
-	1	14	2	0	+	3	12	4	2	-	1	16	0	2	+	1	16	2	0

dónde, como ejemplo, las tres rayas iniciales de K son

$$K = b^2c^{14} - 3b^4c^{12} + 3b^6c^{10} - \dots$$

Ahora se puede constatar, con algún paso algebraico, que las coordenadas de X_5 satisfacen la ecuación de la circunferencia (probar para creer!) q.e.d.