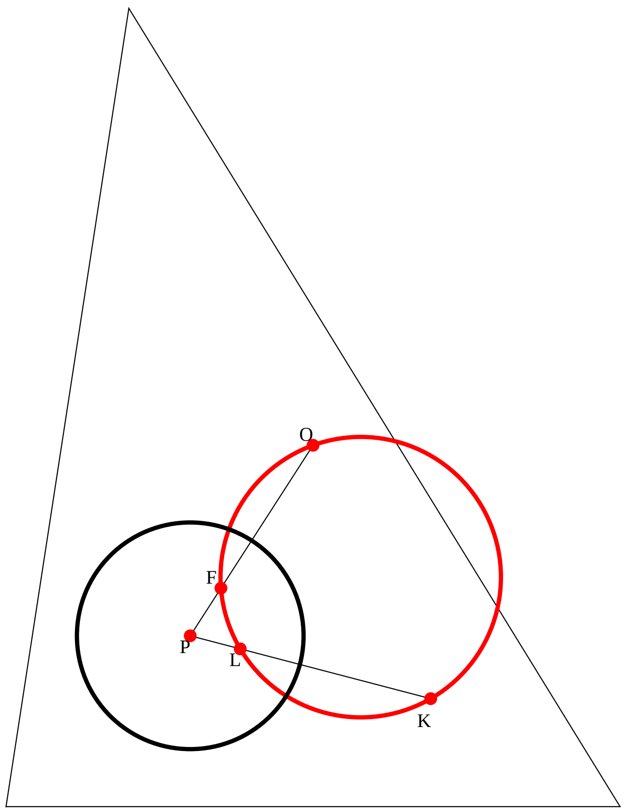
Pr. Cabri 715
por César Beade Franco

Enunciado

El circuncentro, el centro de la circunferencia de los nueve puntos, el punto de Lemoine, y el centro de la hipérbola de Kiepert son concíclicos.

Solución

Sea un triángulo (tipo T0) de vértices A(0,0), B(1,0) y C(a,b) y llamemos a los puntos del problema O, F, L y K en el orden en que fueron citados (1).
Sea P el punto de intersección de las rectas OF y LK. Si son concíclicos existirá una inversión de centro P que transforma O en F y L en K.
Resulta que P tiene una expresión sencilla $P=(\frac{1}{6}(1+4a), \frac{3a-3a^2+b^2}{6b})$.
El radio de la inversión que transforma O en F será $r=\sqrt{PO.PF} = \frac{\sqrt{b^2+((-1+a)a+b^2)(9(-1+a)a+b^2)}}{6b}$.
Ahora solo basta comprobar que el inverso de L es K, es decir, OL.OK = r^2. O aplicar la siguiente expresión vectorial:
Inverssión[c (centro),r (radio)][p (punto)] = $(c + r^2\frac{(p-c)}{(p-c).(p-c)})$ (2).
Y efectivamente se cumple que Inversión[P,r][L] = K.



El anterior cálculo tiene el siguiente aspecto:

$$\text{Inversión}[P,r][L] = \left(\frac{1}{6}(1+4a), \frac{3a-3a^2+b^2}{6b}\right) + \frac{b^2+\left((-1+a)a+b^2\right)\left(9(-1+a)a+b^2\right)}{36b^2}$$

$$\frac{\left(\left(\frac{a+a^2+b^2}{2(1-a+a^2+b^2)}, \frac{b}{2(1-a+a^2+b^2)}\right)-\left(\frac{1}{6}(1+4a), \frac{3a-3a^2+b^2}{6b}\right)\right)}{\left(\left(\frac{a+a^2+b^2}{2(1-a+a^2+b^2)}, \frac{b}{2(1-a+a^2+b^2)}\right)-\left(\frac{1}{6}(1+4a), \frac{3a-3a^2+b^2}{6b}\right)\right).\left(\left(\frac{a+a^2+b^2}{2(1-a+a^2+b^2)}, \frac{b}{2(1-a+a^2+b^2)}\right)-\left(\frac{1}{6}(1+4a), \frac{3a-3a^2+b^2}{6b}\right)\right)} =$$

$$\left(\frac{a+a^4+2(-2+a)ab^2+b^4}{2\left((1+(-1+a)a)^2+(-1+2(-1+a)a)b^2+b^4\right)}, \frac{(1-2a)^2 b}{2\left((1+(-1+a)a)^2+(-1+2(-1+a)a)b^2+b^4\right)}\right)=K$$

- **Notas**

(1) Las coordenadas de estos puntos son $O=\left(\frac{1}{2}, \frac{-a+a^2+b^2}{2b}\right)$, $F=\left(\frac{1}{4}(1+2a), \frac{a-a^2+b^2}{4b}\right)$, $L=\left(\frac{a+a^2+b^2}{2(1-a+a^2+b^2)}, \frac{b}{2(1-a+a^2+b^2)}\right)$ y $K=\left(\frac{a+a^4+2(-2+a)ab^2+b^4}{2\left((1+(-1+a)a)^2+(-1+2(-1+a)a)b^2+b^4\right)}, \frac{(1-2a)^2 b}{2\left((1+(-1+a)a)^2+(-1+2(-1+a)a)b^2+b^4\right)}\right)$. K es el punto medio del segmento determinado por los puntos de Fermat según los problemas 13 y 14 de la página.

(2) Se entiende que r es un número y c,p vectores. El programa que usé (*Mathematica*) simplifica mejor esta expresión.