

PROBLEMA 715

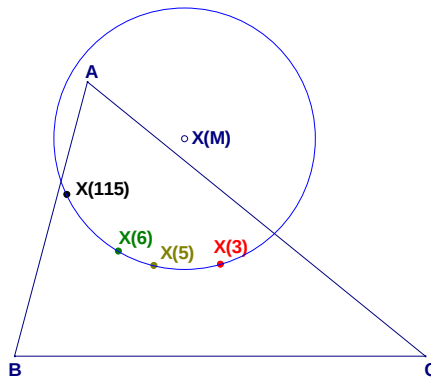
El circuncentro, el centro de la circunferencia de los nueve puntos, el punto de Lemoine y el centro de la hipérbola de Kiepert son concíclicos

Montes, J.(2014): Comunicación personal

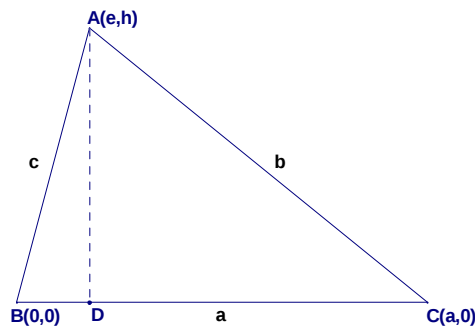
José Montes Valderrama
Maestro del Centro Público de Educación de Adultos «Triana» (Sevilla)

1. Introducción

Se probará, mediante geometría analítica, que en todo triángulo ABC , los puntos $X(3)$ (circuncentro), $X(5)$ (centro de la circunferencia de los nueve puntos), $X(6)$ (punto de Lemoine o simedianos) y $X(115)$ (centro de la hipérbola de Kiepert) son concíclicos. Para que este teorema no pierda generalidad, se considerará cero el radio de la circunferencia cuando el triángulo ABC sea equilátero e infinito si es isósceles.



2. Triángulo de referencia



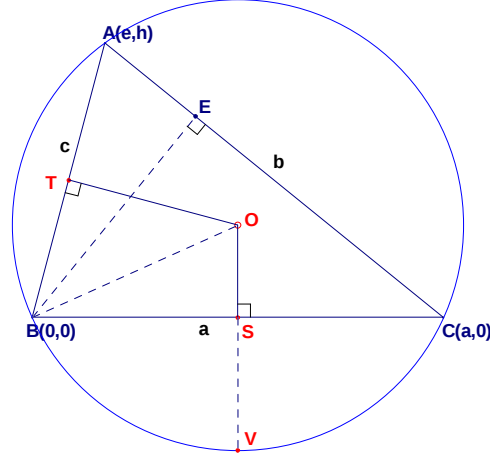
Situando B en el origen de coordenadas. Por el teorema del coseno

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = a^2 + c^2 - 2ac \frac{BD}{c} \Rightarrow BD = e = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

ahora bien, en el triángulo rectángulo ABD ,

$$(AD)^2 = (AB)^2 - (BD)^2 \Rightarrow AD = h = \frac{\sqrt{-a^4 + 2a^2b^2 - b^4 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4}}{2a}$$

3. Coordenadas del circuncentro



S es el punto medio de BC y T es el punto medio de AB . Se trazan por estos puntos las mediatrices que se cortan en el punto O . Se traza también la altura $BE = \frac{ah}{b}$. Aplicando el teorema del coseno en el triángulo ABC

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \frac{AE}{c} \Rightarrow AE = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2b}$$

se verifica que la medida del ángulo inscrito $\widehat{CAB}$ es la mitad del arco $\widehat{BC}$, que es lo mismo que decir el arco $\widehat{BV}$. Pero la medida del ángulo central $\widehat{SOB}$ es también la del arco $\widehat{BV}$, razón por la cual los triángulos EAB y SOB son semejantes. Por ello

$$\frac{OS}{BS} = \frac{AE}{BE}$$

en consecuencia

$$OS = \frac{(\frac{1}{2}a)(\frac{-a^2+b^2+c^2}{2b})}{\frac{ah}{b}} = \frac{-a^2+b^2+c^2}{4h} \quad \text{resultando las coordenadas} \quad \left(\frac{a}{2}, \frac{-a^2+b^2+c^2}{4h} \right)$$

multiplicando, en la ordenada, numerador y denominador por h y teniendo en cuenta el valor de h^2 :

COORDENADA x DEL CIRCUNCENTRO

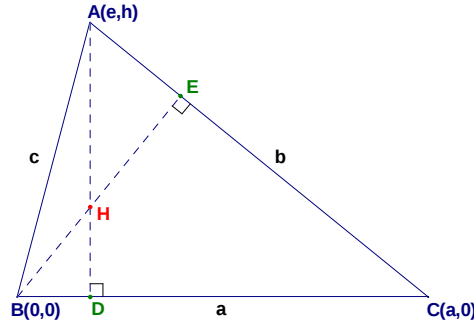
$$O_x = \frac{a}{2}$$

COORDENADA y DEL CIRCUNCENTRO

$$O_y = \frac{a^2 h (a^2 - b^2 - c^2)}{a^4 - 2a^2 b^2 + b^4 - 2a^2 c^2 - 2b^2 c^2 + c^4}$$

4. Coordenadas del centro de la circunferencia de los nueve puntos

Se calculará este punto teniendo en cuenta que está en la recta de Euler y equidista del circuncentro y ortocentro, razón por la cual se necesitan las coordenadas de éste.



Por razonamientos análogos a los anteriores $CE = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$, y la semejanza de los triángulos BCE y DHB implica que

$$\frac{CE}{BE} = \frac{HD}{BD} \Rightarrow HD = \frac{\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}\right)\left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)}{\frac{ah}{b}} = \frac{a^4 - b^4 + 2b^2 c^2 - c^4}{4a^2 h}$$

siendo las coordenadas del ortocentro $\left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}, \frac{a^4 - b^4 + 2b^2 c^2 - c^4}{4a^2 h}\right)$

El punto medio entre el circuncentro y el ortocentro $\left(\frac{2a^2 - b^2 + c^2}{4a}, \frac{a^2 b^2 - b^4 + a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - c^4}{8a^2 h}\right)$ es el centro de la circunferencia de los nueve puntos.

Multiplicando, en la ordenada, numerador y denominador por h y teniendo en cuenta el valor de h^2 :

COORDENADA x DEL CENTRO DE LA CIRCUNFERENCIA DE LOS NUEVE PUNTOS

$$N_x = \frac{2a^2 - b^2 + c^2}{4a}$$

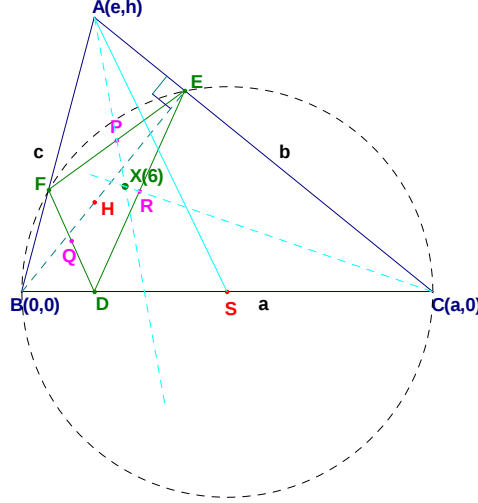
COORDENADA y DEL CENTRO DE LA CIRCUNFERENCIA DE LOS NUEVE PUNTOS

$$N_y = \frac{h(a^2 b^2 - b^4 + a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - c^4)}{2(-a^4 + 2a^2 b^2 - b^4 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - c^4)}$$

5. Coordenadas del punto de Lemoine

Como es sabido, el punto de Lemoine es el punto de concurrencia de las tres simedianas (rectas simétricas a las medianas respecto a las respectivas bisectrices interiores). Para el cálculo de sus coordenadas se partirá de la siguiente proposición:

Sea el triángulo ABC y su triángulo órtico DEF . Cada simediana corta a su correspondiente lado del triángulo órtico por su punto medio.



Si se traza, con centro en el punto medio S del lado BC , una circunferencia con radio BS , ésta pasa por los pies de las alturas de B y C . Esto permite comprobar que

$$\widehat{FEA} = \frac{\Pi}{2} - \widehat{BEF} = \frac{\widehat{CB}}{2} - \frac{\widehat{FB}}{2} = \frac{\widehat{CF}}{2} = \widehat{ABC}$$

razón por la cual la semejanza y posición de los triángulos ABC y FEA permiten afirmar que, siendo P el punto medio de FE , los ángulos $\widehat{PAF}$ y $\widehat{CAS}$ son congruentes y por ello, la recta AP es la simediana de AS

5.1. Pies de las alturas D , E , F

Ecuación del lado AB $hx - ey = 0$

Ecuación del lado BC $y = 0$

Ecuación del lado CA $hx - (e - a)y = ha$

Ecuación de la altura AD $x = e$

Ecuación de la altura BE $(a - e)x - hy = 0$

Ecuación de la altura CF $ex + hy = ea$

Punto D $D(e, 0)$

Punto E $\begin{cases} hx - (e - a)y = ha \\ (a - e)x - hy = 0 \end{cases} \quad E\left(\frac{h^2a}{b^2}, \frac{ha(a - e)}{b^2}\right)$

Punto F $\begin{cases} hx - ey = 0 \\ ex + hy = ea \end{cases} \quad F\left(\frac{ae^2}{c^2}, \frac{aeh}{c^2}\right)$

5.2. Puntos medios Q, R de los lados del triángulo órtico

$$Q\left(\frac{ae^2}{2c^2} + \frac{e}{2}, \frac{aeh}{2c^2}\right) \quad R\left(\frac{a^2h}{2b^2} + \frac{e}{2}, \frac{ah(a-e)}{2b^2}\right)$$

5.3. Intersección de las simedianas BQ, CR

El sistema formado por estas dos simedianas

$$\begin{cases} BQ & y = \frac{2ah}{a^2 - b^2 + 3c^2} x \\ CR & y = \frac{2ah}{-a^2 - 3b^2 + c^2} (x - a) \end{cases}$$

da como resultado el punto de Lemoine:

COORDENADA x DEL PUNTO DE LEMOINE

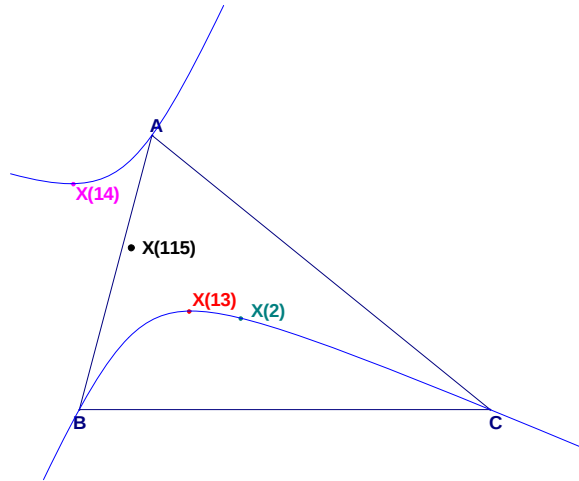
$$L_x = \frac{a(a^2 - b^2 + 3c^2)}{2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

COORDENADA y DEL PUNTO DE LEMOINE

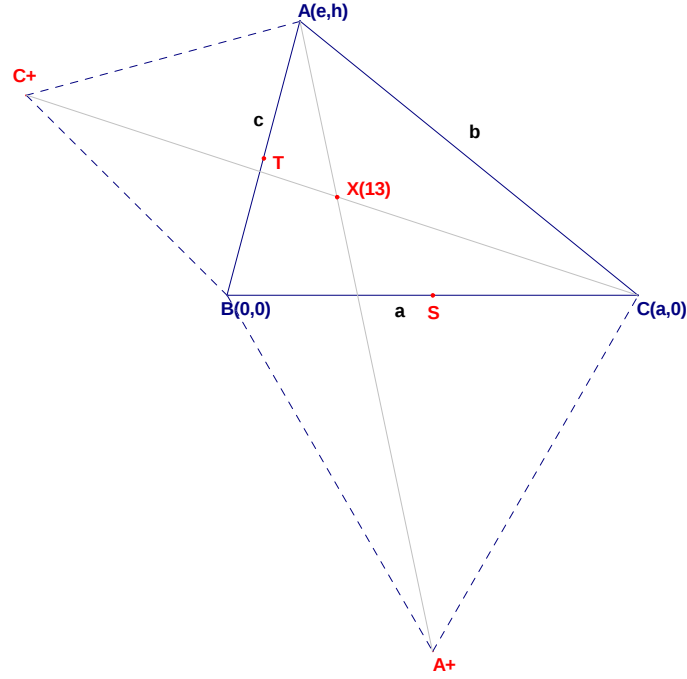
$$L_y = \frac{a^2h}{a^2 + b^2 + c^2}$$

6. Coordenadas del centro de la hipérbola de Kiepert

La hipérbola de Kiepert de un triángulo ABC es la hipérbola equilátera circunscrita al triángulo y que pasa por su baricentro $X(2)$. Además pasa por su ortocentro, por el punto de Spieker, puntos de Napoleón, Fermat, Vecten y algunos más. El centro de esta hipérbola $X(115)$ está en el punto medio de los puntos de Fermat $X(13)$ y $X(14)$ (Enciclopedia de Kimberling). Propiedad que se utilizará para calcularlo.



6.1. Coordenadas del primer punto de Fermat



6.1.1. Coordenadas A^+

$$A^+ \left(\frac{a}{2}, \frac{-a\sqrt{3}}{2} \right)$$

6.1.2. Coordenadas C^+

Del sistema

$$\begin{cases} \frac{hx - ey}{-c} = \frac{c\sqrt{3}}{2} & \text{distancia del punto } C^+ \text{ a la recta } AB \\ 2ex + 2hy = c^2 & \text{recta que pasa por } T \left(\frac{e}{2}, \frac{h}{2} \right) \text{ y } \perp AB \end{cases}$$

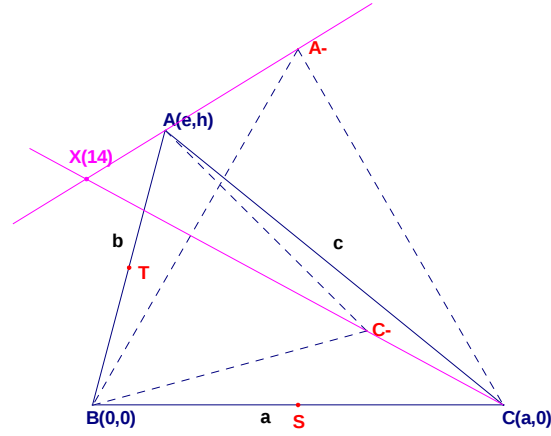
$$C^+ \left(\frac{e}{2} - \frac{h\sqrt{3}}{2}, \frac{h}{2} + \frac{e\sqrt{3}}{2} \right)$$

6.1.3. Intersección de las rectas AA^+ , CC^+

$$\begin{cases} AA^+ & (a\sqrt{3} + 2h)x + (a - 2e)y = a(h + e\sqrt{3}) \\ CC^+ & (h + e\sqrt{3})x + (2a + h\sqrt{3} - e)y = a(h + e\sqrt{3}) \end{cases}$$

$$X(13) \left(\frac{a(h + e\sqrt{3})(a + e + h\sqrt{3})}{6ah + (a^2 + b^2 + c^2)\sqrt{3}}, \frac{a(h + e\sqrt{3})(h + (a - e)\sqrt{3})}{6ah + (a^2 + b^2 + c^2)\sqrt{3}} \right)$$

6.2. Coordenadas del segundo punto de Fermat



6.2.1. Coordenadas A^-

$$A^- \left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2} \right)$$

6.2.2. Coordenadas C^-

Del sistema

$$\begin{cases} \frac{hx - ey}{c} = \frac{c\sqrt{3}}{2} & \text{distancia del punto } C^- \text{ a la recta } AB \\ 2ex + 2hy = c^2 & \text{recta que pasa por } T \left(\frac{e}{2}, \frac{h}{2} \right) \text{ y } \perp AB \end{cases}$$

$$C^- \left(\frac{e}{2} + \frac{h\sqrt{3}}{2}, \frac{h}{2} - \frac{e\sqrt{3}}{2} \right)$$

6.2.3. Intersección de las rectas AA^- , CC^-

$$\begin{cases} AA^- & (a\sqrt{3} - 2h)x + (2e - a)y = a(e\sqrt{3} - h) \\ CC^- & (e\sqrt{3} - h)x + (e + h\sqrt{3} - 2a)y = a(e\sqrt{3} - h) \end{cases}$$

$$X(14) \left(\frac{a(e\sqrt{3} - h)(-a - e + h\sqrt{3})}{6ah - (a^2 + b^2 + c^2)\sqrt{3}}, \frac{a(e\sqrt{3} - h)((a - e)\sqrt{3} - h)}{6ah - (a^2 + b^2 + c^2)\sqrt{3}} \right)$$

6.3. Punto medio entre X(13) y X(14)

$$\text{Abcisa X(115)} = \frac{\frac{a(h+e\sqrt{3})(a+e+h\sqrt{3})}{6ah+(a^2+b^2+c^2)\sqrt{3}} + \frac{a(e\sqrt{3}-h)(-a-e+h\sqrt{3})}{6ah-(a^2+b^2+c^2)\sqrt{3}}}{2} = \frac{a[3(a^2+b^2+c^2)(-2ae-2c^2)+12h^2(4ae+a^2)]}{24(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2-a^4-b^4-c^4)}$$

$$\text{Ordenada X(115)} = \frac{\frac{a(h+e\sqrt{3})(h+(a-e)\sqrt{3})}{6ah+(a^2+b^2+c^2)\sqrt{3}} + \frac{a(e\sqrt{3}-h)((a-e)\sqrt{3}-h)}{6ah-(a^2+b^2+c^2)\sqrt{3}}}{2} = \frac{6a^2h[2c^2+6ae-8e^2-(a^2+b^2+c^2)]}{24(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2-a^4-b^4-c^4)}$$

teniendo en cuenta el valor de e y h^2 :

COORDENADA x DEL CENTRO DE LA HIPÉRBOLA DE KIEPERT

$$K_x = \frac{-2a^6 + 4a^4b^2 - 3a^2b^4 + b^6 + 2a^2b^2c^2 - 3b^4c^2 - a^2c^4 + 3b^2c^4 - c^6}{4a(-a^4 + a^2b^2 - b^4 + a^2c^2 + b^2c^2 - c^4)}$$

COORDENADA y DEL CENTRO DE LA HIPÉRBOLA DE KIEPERT

$$K_y = \frac{-h(b^4 - 2b^2c^2 + c^4)}{2(-a^4 + a^2b^2 - b^4 + a^2c^2 + b^2c^2 - c^4)}$$

7. Centro de la circunferencia X(3)-X(5)-X(6)-X(115)

El centro de la circunferencia será hallado mediante la intersección de las mediatrices [X(3)X(5)] y [X(3)X(6)]

7.1. Mediatriz [X(3) X(5)]

$$\text{Punto medio entre X(3) y X(5)} \left(\frac{4a^2 - b^2 + c^2}{8a}, \frac{-a^2 + b^2 + c^2 + 4h^2}{16h} \right)$$

$$\text{Pendiente de la mediatriz [X(3) X(5)]} = \frac{2h(b^2 - c^2)}{a(3a^2 - 3b^2 - 3c^2 + 4h^2)}$$

Ecuación de la mediatriz [X(3) X(5)]

$$32ah^2(b^2 - c^2)x - 16a^2h(3a^2 - 3b^2 - 3c^2 + 4h^2)y = -a^2(3a^2 - 3b^2 - 3c^2 + 4h^2)(-a^2 + b^2 + c^2 + 4h^2) + 4h^2(b^2 - c^2)(4a^2 - b^2 + c^2)$$

7.2. Mediatriz [X(3) X(6)]

$$\text{Punto medio entre X(3) y X(6)} \left(\frac{a(a^2 + 2c^2)}{2(a^2 + b^2 + c^2)}, \frac{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2) + 4a^2h^2}{8h(a^2 + b^2 + c^2)} \right)$$

$$\text{Pendiente de la mediatriz [X(3) X(6)]} = \frac{4ah(b^2 - c^2)}{4a^2h^2 - (-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Ecuación de la mediatriz [X(3) X(6)]

$$32ah^2(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 - c^2)x - 8h[4a^2h^2 - (-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2)](a^2 + b^2 + c^2)y = [4a^2h^2 - (-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2)][4a^2h^2 + (-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2)] - 16a^2h^2(a^2 + 2c^2)(b^2 - c^2)$$

Resolviendo el sistema formado por estas dos mediatrices y sustituyendo convenientemente el valor de h^2 se obtienen las coordenadas del centro de la circunferencia:

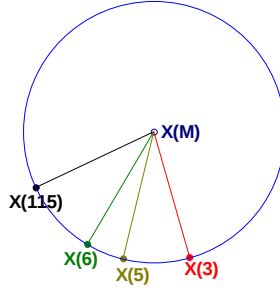
COORDENADA x DEL CENTRO X(M) DE LA CIRCUNFERENCIA

$$M_x = \frac{a(-a^{10}b^2 + 3a^8b^4 - 2a^6b^6 - 2a^4b^8 + 3a^2b^{10} - b^{12} + 3a^{10}c^2 - 8a^8b^2c^2 + 17a^6b^4c^2 - 14a^4b^6c^2 + 2b^{10}c^2 - 5a^8c^4 + 5a^6b^2c^4 - 2a^4b^4c^4 + 7a^2b^6c^4 - 7b^8c^4 - 2a^6c^6 - 2a^4b^2c^6 - 5a^2b^4c^6 + 16b^6c^6 + 6a^4c^8 - 15b^4c^8 - a^2c^{10} + 6b^2c^{10} - c^{12})}{4(-a^{10}b^2 + 2a^8b^4 - 2a^4b^8 + a^2b^{10} + a^{10}c^2 + 3a^6b^4c^2 - 3a^4b^6c^2 - b^{10}c^2 - 2a^8c^4 - 3a^6b^2c^4 + 3a^2b^6c^4 + 2b^8c^4 + 3a^4b^2c^6 - 3a^2b^4c^6 + 2a^4c^8 - 2b^4c^8 - a^2c^{10} + b^2c^{10})}$$

COORDENADA y DEL CENTRO X(M) DE LA CIRCUNFERENCIA

$$M_y = \frac{h(-a^{10} + 2a^8b^2 - 2a^4b^6 + a^2b^8 + 2a^8c^2 - a^6b^2c^2 - a^4b^4c^2 - 2a^2b^6c^2 - a^4b^2c^4 - 2a^{10} + 4a^8b^2 - 4a^4b^6 + 2a^2b^8 + 4a^8c^2 + 6a^6b^2c^2 - 10a^4b^4c^2 + 2a^2b^6c^2 + 6a^2b^4c^4 - 2a^4c^6 - 2a^2b^2c^6 + a^2c^8)}{-2b^8c^2 - 10a^4b^2c^4 + 8a^2b^4c^4 + 2b^6c^4 - 4a^4c^6 + 2a^2b^2c^6 + 2b^4c^6 + 2a^2c^8 - 2b^2c^8}$$

8. Igualdad de los radios



Partiendo de los cuadrados de los radios

$$\text{RADIO}^2[\text{X(M)}\text{X(3)}] = (M_x - O_x)^2 + (M_y - O_y)^2$$

$$\text{RADIO}^2[\text{X(M)}\text{X(5)}] = (M_x - N_x)^2 + (M_y - N_y)^2$$

$$\text{RADIO}^2[\text{X(M)}\text{X(6)}] = (M_x - L_x)^2 + (M_y - L_y)^2$$

$$\text{RADIO}^2[\text{X(M)}\text{X(115)}] = (M_x - K_x)^2 + (M_y - K_y)^2$$

es necesario demostrar la igualdad del último (puesto que el cuarto punto X(115) no ha sido utilizado en el cálculo del centro) con cualquiera de los tres primeros para que se verifique que la circunferencia pasa por los cuatro puntos, o lo que es lo mismo

$$\text{RADIO}^2[\text{X(M)}\text{X(3)}] = \text{RADIO}^2[\text{X(M)}\text{X(115)}]$$

entonces

$$[(M_x - O_x)^2 + (M_y - O_y)^2] - [(M_x - K_x)^2 + (M_y - K_y)^2] = 0$$

$$[((M_x - O_x)^2 + (M_y - O_y)^2) - [(M_x - K_x)^2 + (M_y - K_y)^2] =$$

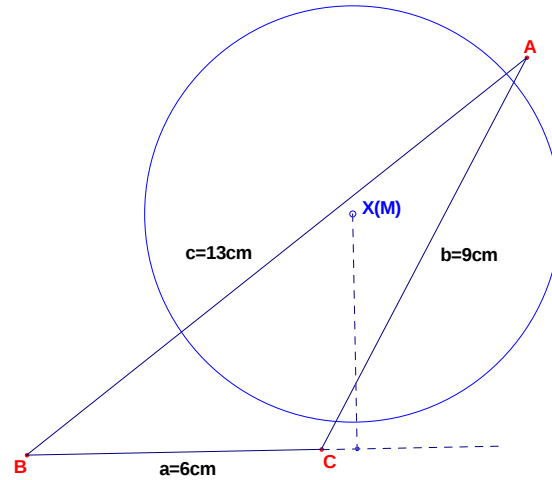
$$\begin{aligned} & (4a^{24}b^2 - 22a^{22}b^4 + 50a^{20}b^6 - 55a^{18}b^8 + 14a^{16}b^{10} + 42a^{14}b^{12} - 62a^{12}b^{14} + 40a^{10}b^{16} - 10a^8b^{18} - 4a^6b^{20} + \\ & 4a^4b^{22} - a^2b^{24} + 4a^{24}c^2 - 52a^{22}b^2c^2 + 186a^{20}b^4c^2 - 344a^{18}b^6c^2 + 418a^{16}b^8c^2 - 393a^{14}b^{10}c^2 + 305a^{12}b^{12}c^2 - \\ & 167a^{10}b^{14}c^2 + 27a^8b^{16}c^2 + 45a^6b^{18}c^2 - 43a^4b^{20}c^2 + 15a^2b^{22}c^2 - b^{24}c^2 - 22a^{22}c^4 + 186a^{20}b^2c^4 - 466a^{18}b^4c^4 + \\ & 588a^{16}b^6c^4 + 444a^{14}b^8c^4 + 211a^{12}b^{10}c^4 - 102a^{10}b^{12}c^4 + 159a^8b^{14}c^4 - 226a^6b^{16}c^4 + 191a^4b^{18}c^4 - 84a^2b^{20}c^4 + \\ & 9b^{22}c^4 + 50a^{20}c^6 - 344a^{18}b^2c^6 + 588a^{16}b^4c^6 - 458a^{14}b^6c^6 + 174a^{12}b^8c^6 + 55a^{10}b^{10}c^6 - 267a^8b^{12}c^6 + 440a^6b^{14}c^6 - \\ & 422a^4b^{16}c^6 + 251a^2b^{18}c^6 - 35b^{20}c^6 - 55a^{18}c^8 + 418a^{16}b^2c^8 - 444a^{14}b^4c^8 + 174a^{12}b^6c^8 - 84a^{10}b^8c^8 + 123a^8b^{10}c^8 - \\ & 458a^6b^{12}c^8 + 490a^4b^{14}c^8 - 471a^2b^{16}c^8 + 75b^{18}c^8 + 14a^{16}c^{10} - 393a^{14}b^2c^{10} + 211a^{12}b^4c^{10} + 55a^{10}b^6c^{10} + \\ & 123a^8b^8c^{10} + 406a^6b^{10}c^{10} - 220a^4b^{12}c^{10} + 630a^2b^{14}c^{10} - 90b^{16}c^{10} + 42a^{14}c^{12} + 305a^{12}b^2c^{12} - 102a^{10}b^4c^{12} - \\ & 267a^8b^6c^{12} - 458a^6b^8c^{12} - 220a^4b^{10}c^{12} - 680a^2b^{12}c^{12} + 42b^{14}c^{12} - 62a^{12}c^{14} - 167a^{10}b^2c^{14} + 159a^8b^4c^{14} + \\ & 440a^6b^6c^{14} + 490a^4b^8c^{14} + 630a^2b^{10}c^{14} + 42b^{12}c^{14} + 40a^{10}c^{16} + 27a^8b^2c^{16} - 226a^6b^4c^{16} - 422a^4b^6c^{16} - \\ & 471a^2b^8c^{16} - 90b^{10}c^{16} - 10a^8c^{18} + 45a^6b^2c^{18} + 191a^4b^4c^{18} + 251a^2b^6c^{18} + 75b^8c^{18} - 4a^6c^{20} - 43a^4b^2c^{20} - \\ & 84a^2b^4c^{20} - 35b^6c^{20} + 4a^4c^{22} + 15a^2b^2c^{22} + 9b^4c^{22} - a^2c^{24} - b^2c^{24} + 16a^{20}b^2h^2 - 56a^{20}b^4h^2 + 72a^{18}b^6h^2 - \\ & 20a^{16}b^8h^2 - 56a^{14}b^{10}h^2 + 76a^{12}b^{12}h^2 - 40a^{10}b^{14}h^2 + 4a^8b^{16}h^2 + 8a^6b^{18}h^2 - 4a^4b^{20}h^2 + 16a^{22}c^2h^2 - \\ & 144a^{20}b^2c^2h^2 + 360a^{18}b^4c^2h^2 - 480a^{16}b^6c^2h^2 + 456a^{14}b^8c^2h^2 - 332a^{12}b^{10}c^2h^2 + 140a^{10}b^{12}c^2h^2 + 16a^8b^{14}c^2h^2 - \\ & 72a^6b^{16}c^2h^2 + 44a^4b^{18}c^2h^2 - 4a^2b^{20}c^2h^2 - 56a^{20}c^4h^2 + 360a^{18}b^2c^4h^2 - 600a^{16}b^4c^4h^2 + 480a^{14}b^6c^4h^2 - \\ & 244a^{12}b^8c^4h^2 + 180a^{10}b^{10}c^4h^2 - 264a^8b^{12}c^4h^2 + 280a^6b^{14}c^4h^2 - 196a^4b^{16}c^4h^2 + 28a^2b^{18}c^4h^2 + 72a^{18}c^6h^2 - \\ & 480a^{16}b^2c^6h^2 + 480a^{14}b^4c^6h^2 - 152a^{12}b^6c^6h^2 - 72a^{10}b^8c^6h^2 + 432a^8b^{10}c^6h^2 - 440a^6b^{12}c^6h^2 + 464a^4b^{14}c^6h^2 - \\ & 80a^2b^{16}c^6h^2 - 20a^{16}c^8h^2 + 456a^{14}b^2c^8h^2 - 244a^{12}b^4c^8h^2 - 72a^{10}b^6c^8h^2 - 440a^8b^8c^8h^2 + 224a^6b^{10}c^8h^2 - \\ & 696a^4b^{12}c^8h^2 + 112a^2b^{14}c^8h^2 - 56a^{14}c^{10}h^2 - 332a^{12}b^2c^{10}h^2 + 180a^{10}b^4c^{10}h^2 + 432a^8b^6c^{10}h^2 + 224a^6b^8c^{10}h^2 + \\ & 776a^4b^{10}c^{10}h^2 - 56a^2b^{12}c^{10}h^2 + 76a^{12}c^{12}h^2 + 140a^{10}b^2c^{12}h^2 - 264a^8b^4c^{12}h^2 - 440a^6b^6c^{12}h^2 - 696a^4b^8c^{12}h^2 - \\ & 56a^2b^{10}c^{12}h^2 - 40a^{10}c^{14}h^2 + 16a^8b^2c^{14}h^2 + 280a^6b^4c^{14}h^2 + 464a^4b^6c^{14}h^2 + 112a^2b^8c^{14}h^2 + 4a^8c^{16}h^2 - \\ & 72a^6b^2c^{16}h^2 - 196a^4b^4c^{16}h^2 - 80a^2b^6c^{16}h^2 + 8a^6c^{18}h^2 + 44a^4b^2c^{18}h^2 + 28a^2b^4c^{18}h^2 - 4a^4c^{20}h^2 - 4a^2b^2c^{20}h^2) / \\ & [16a^2(a^2 - c^2)(a^4 - b^4 + a^2c^2 - b^2c^2)(a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4)^2(a^4 - a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - b^2c^2 + c^4)^2] \end{aligned}$$

Sacando factor común la expresión $4a^2h^2$ en los sumandos del numerador que la contengan, sustituyéndola por su valor $-a^4 + 2a^2b^2 - b^4 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4$ y efectuando los correspondientes productos

$$\begin{aligned} & 4a^{24}b^2 - 22a^{22}b^4 + 50a^{20}b^6 - 55a^{18}b^8 + 14a^{16}b^{10} + 42a^{14}b^{12} - 62a^{12}b^{14} + 40a^{10}b^{16} - 10a^8b^{18} - 4a^6b^{20} + \\ & 4a^4b^{22} - a^2b^{24} + 4a^{24}c^2 - 52a^{22}b^2c^2 + 186a^{20}b^4c^2 - 344a^{18}b^6c^2 + 418a^{16}b^8c^2 - 393a^{14}b^{10}c^2 + 305a^{12}b^{12}c^2 - \\ & 167a^{10}b^{14}c^2 + 27a^8b^{16}c^2 + 45a^6b^{18}c^2 - 43a^4b^{20}c^2 + 15a^2b^{22}c^2 - b^{24}c^2 - 22a^{22}c^4 + 186a^{20}b^2c^4 - 466a^{18}b^4c^4 + \\ & 588a^{16}b^6c^4 + 444a^{14}b^8c^4 + 211a^{12}b^{10}c^4 - 102a^{10}b^{12}c^4 + 159a^8b^{14}c^4 - 226a^6b^{16}c^4 + 191a^4b^{18}c^4 - 84a^2b^{20}c^4 + \\ & 9b^{22}c^4 + 50a^{20}c^6 - 344a^{18}b^2c^6 + 588a^{16}b^4c^6 - 458a^{14}b^6c^6 + 174a^{12}b^8c^6 + 55a^{10}b^{10}c^6 - 267a^8b^{12}c^6 + 440a^6b^{14}c^6 - \\ & 422a^4b^{16}c^6 + 251a^2b^{18}c^6 - 35b^{20}c^6 - 55a^{18}c^8 + 418a^{16}b^2c^8 - 444a^{14}b^4c^8 + 174a^{12}b^6c^8 - 84a^{10}b^8c^8 + 123a^8b^{10}c^8 - \\ & 458a^6b^{12}c^8 + 490a^4b^{14}c^8 - 471a^2b^{16}c^8 + 75b^{18}c^8 + 14a^{16}c^{10} - 393a^{14}b^2c^{10} + 211a^{12}b^4c^{10} + 55a^{10}b^6c^{10} + \\ & 123a^8b^8c^{10} + 406a^6b^{10}c^{10} - 220a^4b^{12}c^{10} + 630a^2b^{14}c^{10} - 90b^{16}c^{10} + 42a^{14}c^{12} + 305a^{12}b^2c^{12} - 102a^{10}b^4c^{12} - \\ & 267a^8b^6c^{12} - 458a^6b^8c^{12} - 220a^4b^{10}c^{12} - 680a^2b^{12}c^{12} + 42b^{14}c^{12} - 62a^{12}c^{14} - 167a^{10}b^2c^{14} + 159a^8b^4c^{14} + \\ & 440a^6b^6c^{14} + 490a^4b^8c^{14} + 630a^2b^{10}c^{14} + 42b^{12}c^{14} + 40a^{10}c^{16} + 27a^8b^2c^{16} - 226a^6b^4c^{16} - 422a^4b^6c^{16} - \\ & 471a^2b^8c^{16} - 90b^{10}c^{16} - 10a^8c^{18} + 45a^6b^2c^{18} + 191a^4b^4c^{18} + 251a^2b^6c^{18} + 75b^8c^{18} - 4a^6c^{20} - 43a^4b^2c^{20} - \\ & 84a^2b^4c^{20} - 35b^6c^{20} + 4a^4c^{22} + 15a^2b^2c^{22} + 9b^4c^{22} - a^2c^{24} - b^2c^{24} - 4a^{24}b^2 + 22a^{22}b^4 - 50a^{20}b^6 + 55a^{18}b^8 - \\ & 14a^{16}b^{10} - 42a^{14}b^{12} + 62a^{12}b^{14} - 40a^{10}b^{16} + 10a^8b^{18} + 4a^6b^{20} - 4a^4b^{22} + a^2b^{24} - 4a^{24}c^2 + 52a^{22}b^2c^2 - \\ & 186a^{20}b^4c^2 + 344a^{18}b^6c^2 - 418a^{16}b^8c^2 + 393a^{14}b^{10}c^2 - 305a^{12}b^{12}c^2 + 167a^{10}b^{14}c^2 - 27a^8b^{16}c^2 - 45a^6b^{18}c^2 + \\ & 43a^4b^{20}c^2 - 15a^2b^{22}c^2 + b^{24}c^2 + 22a^{22}c^4 - 186a^{20}b^2c^4 + 466a^{18}b^4c^4 - 588a^{16}b^6c^4 + 444a^{14}b^8c^4 - 211a^{12}b^{10}c^4 + \\ & 102a^{10}b^{12}c^4 - 159a^8b^{14}c^4 + 226a^6b^{16}c^4 - 191a^4b^{18}c^4 + 84a^2b^{20}c^4 - 9b^{22}c^4 - 50a^{20}c^6 + 344a^{18}b^2c^6 - 588a^{16}b^4c^6 + \\ & 458a^{14}b^6c^6 - 174a^{12}b^8c^6 - 55a^{10}b^{10}c^6 + 267a^8b^{12}c^6 - 440a^6b^{14}c^6 + 422a^4b^{16}c^6 - 251a^2b^{18}c^6 + 35b^{20}c^6 + \\ & 55a^{18}c^8 - 418a^{16}b^2c^8 + 444a^{14}b^4c^8 - 174a^{12}b^6c^8 + 84a^{10}b^8c^8 - 123a^8b^{10}c^8 + 458a^6b^{12}c^8 - 490a^4b^{14}c^8 + \\ & 471a^2b^{16}c^8 - 75b^{18}c^8 - 14a^{16}c^{10} + 393a^{14}b^2c^{10} - 211a^{12}b^4c^{10} - 55a^{10}b^6c^{10} - 123a^8b^8c^{10} - 406a^6b^{10}c^{10} + \\ & 220a^4b^{12}c^{10} - 630a^2b^{14}c^{10} + 90b^{16}c^{10} - 42a^{14}c^{12} - 305a^{12}b^2c^{12} + 102a^{10}b^4c^{12} + 267a^8b^6c^{12} + 458a^6b^8c^{12} + \\ & 220a^4b^{10}c^{12} + 680a^2b^{12}c^{12} - 42b^{14}c^{12} + 62a^{12}c^{14} + 167a^{10}b^2c^{14} - 159a^8b^4c^{14} - 440a^6b^6c^{14} - 490a^4b^8c^{14} - \\ & 630a^2b^{10}c^{14} - 42b^{12}c^{14} - 40a^{10}c^{16} - 27a^8b^2c^{16} + 226a^6b^4c^{16} + 422a^4b^6c^{16} + 471a^2b^8c^{16} + 90b^{10}c^{16} + 10a^8c^{18} - \\ & 45a^6b^2c^{18} - 191a^4b^4c^{18} - 251a^2b^6c^{18} - 75b^8c^{18} + 4a^6c^{20} + 43a^4b^2c^{20} + 84a^2b^4c^{20} + 35b^6c^{20} - 4a^4c^{22} - \\ & 15a^2b^2c^{22} - 9b^4c^{22} + a^2c^{24} + b^2c^{24} = 0 \end{aligned}$$

9. Coordenadas del centro en el triángulo de referencia de Kimberling

Clark Kimberling ha establecido en su *Encyclopedia of Triangle Centers (ETC)* un sistema de clasificación consistente en asociar a cada punto característico lo que diste a la base BC o su prolongación, utilizando para ello el siguiente triángulo de referencia



Así pues, en lo que se refiere al centro de la circunferencia, halladas sus coordenadas rectangulares $\left(\frac{29092121893}{4325798400}, \frac{9931771\sqrt{35}}{12289200} \right)$, es la ordenada la que determina dicha distancia

$$\frac{9931771\sqrt{35}}{12289200} = 4.78120216315749249119$$