

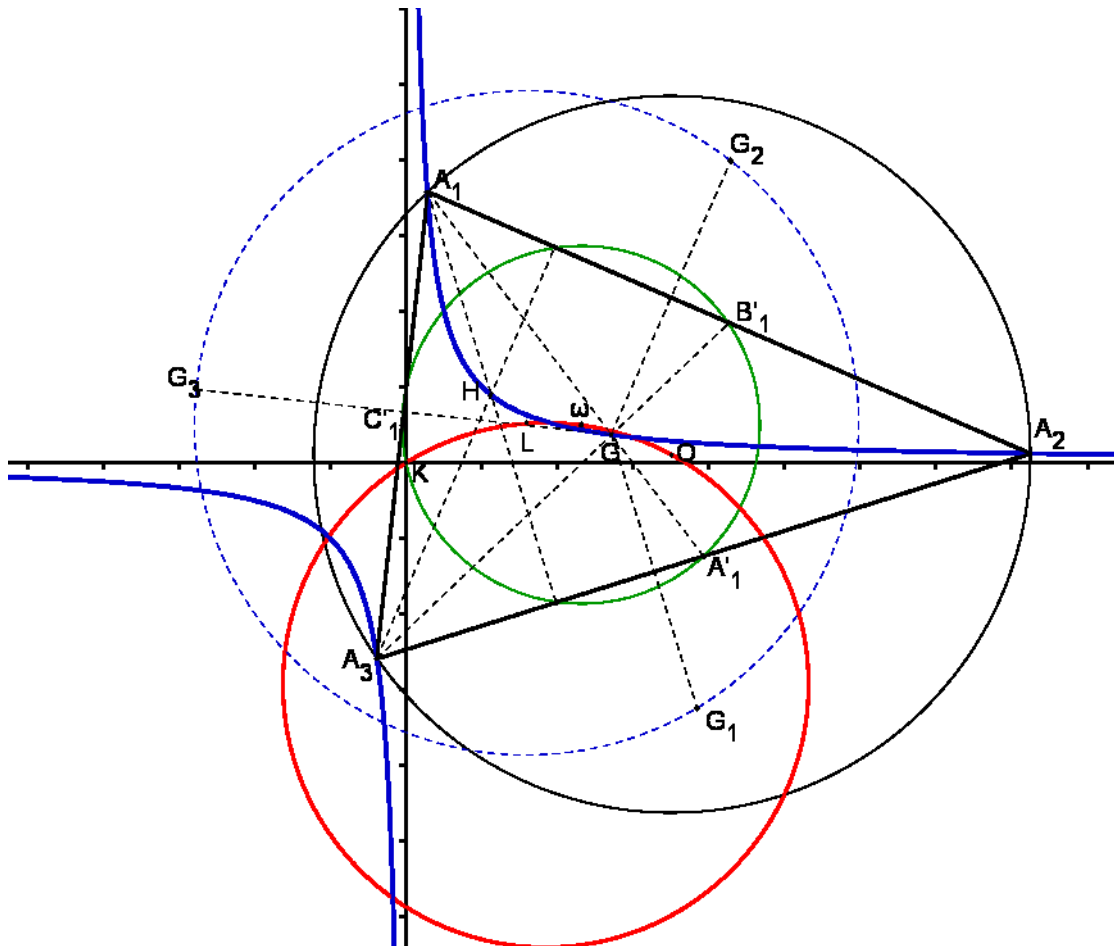
Problema n°715

Propuesto por José Montes Valderrama

El circuncentro, el centro de la circunferencia de los nueve puntos, el punto de Lemoine, y el centro de la hipérbola de Kiepert son concíclicos.

Montes, J. (2014): Comunicación personal

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Nous allons démontrer que le centre du cercle circonscrit, le centre du cercle des neuf points, le point de Lemoine et le centre de Kiepert sont cocycliques après avoir calculé les coordonnées cartésiennes des trois premiers points dans un repère orthonormé dont le centre de Kiepert est l'origine (0,0). Nous supposons que le triangle de référence **(T)** est un triangle scalène.

L'hyperbole de Kiepert d'un triangle scalène **(T)** est une hyperbole équilatère **(K)** qui passe par les trois sommets du triangle, par son centre de gravité **G** et son orthocentre **H**.

Sans perte de généralité, on prend pour équation de l'hyperbole l'équation $xy = 1$. C'est toujours possible dès lors que **(T)** n'est pas un triangle isocèle.

Dans ces conditions les coordonnées des trois sommets A_1, A_2 et A_3 de **T** sont respectivement égales à $[x_1, 1/x_1]$, $[x_2, 1/x_2]$ et $[x_3, 1/x_3]$.

On en déduit les coordonnées de **G** $[(x_1 + x_2 + x_3)/3, (1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3)/3]$ ou encore $[(x_1 + x_2 + x_3)/3, (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)/3x_1x_2x_3]$

Comme **G** appartient à **(K)**, on a $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 9x_1x_2x_3/(x_1 + x_2 + x_3)$.

En posant $x_1 + x_2 + x_3 = s$ et $x_1x_2x_3 = p$, on a $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 9p/s$.
Les coordonnées de G sont $(s/3, 3/s)$.

On vérifie aisément à partir des équations des hauteurs issues de A_1 et de A_2 que l'orthocentre H qui est à l'intersection de ces deux hauteurs tout en appartenant à (K) , a pour coordonnées $(-1/p, -p)$.

Selon une propriété bien connue de la droite d'Euler qui passe par les points O, G et H, le centre O du cercle circonscrit est tel que $\vec{GH} = 2\vec{OG}$.

Les coordonnées de O sont alors : $[x_O, y_O] = [(ps + 1)2p, (ps + 9)/2s]$.

Par ailleurs, le centre ω du cercle des neuf points ou cercle d'Euler est à mi-distance entre O et H. Ses coordonnées sont donc égales à : $[x_\omega, y_\omega] = [(ps - 1)/4p, (9 - ps)/4s]$

Enfin le point de Lemoine L ou point symédian est par définition le conjugué isogonal de G. Il a pour coordonnées trilinéaires les dimensions des trois côtés du triangle (T) : l_1, l_2 et l_3 .

Il en résulte que les coordonnées cartésiennes de L sont respectivement $\frac{l_1^2x_1 + l_2^2x_2 + l_3^2x_3}{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}$ et

$$\frac{l_1^2y_1 + l_2^2y_2 + l_3^2y_3}{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2} \text{ avec } y_1 = 1/x_1 \text{ et } l_1^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 = \frac{(x_2 - x_3)^2(x_2^2x_3^2 + 1)}{x_2^2x_3^2} \text{ etc...}$$

Tous calculs faits, on obtient des expressions simples des coordonnées de L en fonction de s et de p : $[x_L, y_L] = [2s/(3 - ps), -6p/(3 - ps)]$.

Nota : Pour obtenir ces coordonnées, on peut aussi utiliser la définition du point [conjugué isogonal](#) d'un point P par rapport à un triangle ABC qui est le point d'intersection des symétriques des droites PA, PB et PC par rapport aux bissectrices des angles du triangle. Il se construit en prenant les symétriques G_1, G_2 et G_3 de G par rapport aux trois côtés de (T) et en déterminant le centre du cercle circonscrit au triangle résultant.

Tout cercle passant par le centre de Kiepert de coordonnées (0,0) a pour équation : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$.

Les quatre points K, O, ω et L sont cocycliques si l'on a les trois équations :

$$x_O^2 + y_O^2 - 2ax_O - 2by_O = 0, x_\omega^2 + y_\omega^2 - 2ax_\omega - 2by_\omega = 0 \text{ et } x_L^2 + y_L^2 - 2ax_L - 2by_L = 0$$

ce qui revient à démontrer que le déterminant ci-après est nul :

$$\begin{vmatrix} 2x_O & 2y_O & -(x_O^2 + y_O^2) \\ 2x_\omega & 2y_\omega & -(x_\omega^2 + y_\omega^2) \\ 2x_L & 2y_L & -(x_L^2 + y_L^2) \end{vmatrix}$$

En calculant la combinaison linéaire $V_1 - 4V_2$ avec

$$V_1 = [2x_O, 2y_O, -(x_O^2 + y_O^2)] \text{ et } V_2 = [2x_\omega, 2y_\omega, -(x_\omega^2 + y_\omega^2)], \text{ on obtient le vecteur}$$

$$[(3 - ps)/p, 3(ps - 3)/s, -(9p^2 + s^2)/ps] \text{ qui est lui-même colinéaire au vecteur } [s(3 - ps), 3(ps - 3), -(9p^2 + s^2)].$$

Or le vecteur $V_3 = [2x_L, 2y_L, -(x_L^2 + y_L^2)]$ s'exprime sous la forme

$$[4s/(3 - ps), -12p/(3 - ps), -4(9p^2 + s^2)/(3 - ps)^2] \text{ qui est lui-même colinéaire au vecteur } [s(3 - ps), 3(ps - 3), -(9p^2 + s^2)]. \text{ c.q.f.d.}$$