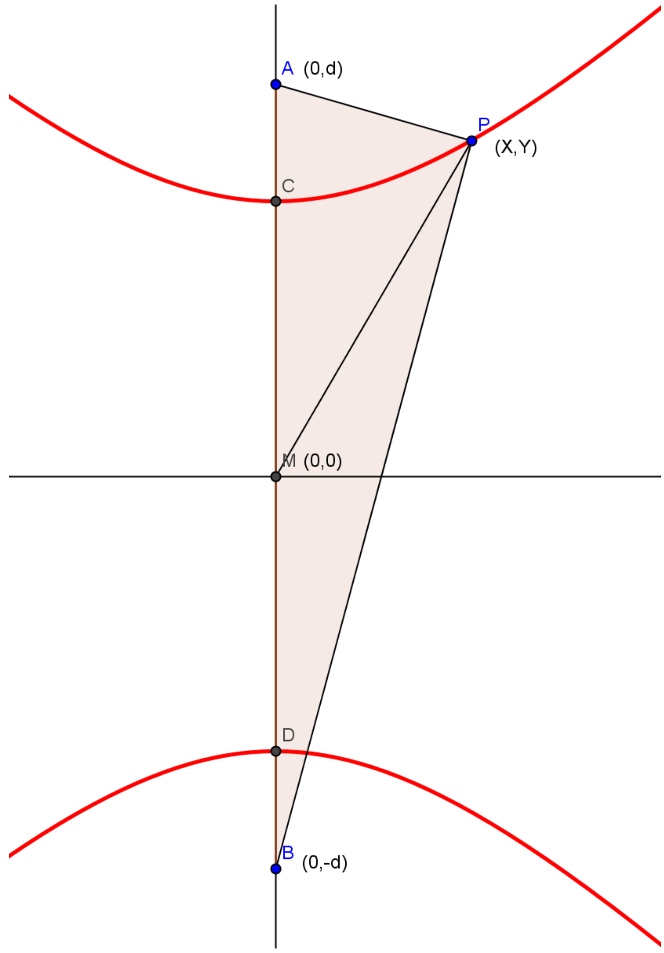
Problema 716

Dado el triángulo PAB, sea M el punto medio de AB. Encuentra el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que PM es media proporcional de PA y PB.

<u>Solución de Adolfo Soler</u>



Sin pérdida de generalidad, hacemos coincidir el punto M con el origen de coordenadas y el lado AB lo situamos sobre el eje de ordenadas.

$$\frac{PA}{PM} = \frac{PM}{PB}$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + (y-d)^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + (y+d)^2}}$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^4 + x^2(y+d)^2 + x^2(y-d)^2 + (y-d)^2(y+d)^2}$$

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = x^4 + 2x^2y^2 + 2x^2d^2 + y^4 + d^4 - 2d^2y^2$$

Simplificando y reordenado los términos tenemos,

$$y^2 - x^2 = \frac{d^2}{2}$$

$$\boldsymbol{\frac{y^2}{(d/\sqrt{2})^2} - \frac{x^2}{(d/\sqrt{2})^2} = 1}$$

Ecuación de una hipérbola, de:

Centro M (0,0)

Vértices C(0, d/√2) y D(0, -d/√2)

Focos A(0,d) y B (0,-d)

Excentricidad: √2