Problema 716.-

Dado el triángulo PAB, sea M el punto medio de AB.
Encuentra el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que PM es media proporcional de PA y PB.

Real, M. (2011): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Consideramos en general un triángulo ABC. Supongamos que a>b.

La mediana m_c, relativa al Vértice C, verifica la relación $2{m_c}^2 = a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}$ (I).

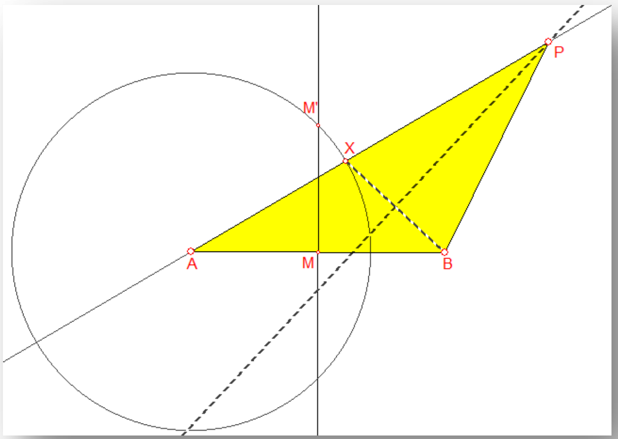
Si además m_c es media proporcional de PA y PB entonces ${m_c}^2 = a.b$ (II).

De ambas relaciones (I) y (II) obtenemos que $2a.b = a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2} \rightarrow (a-b)^2 = \frac{c^2}{2} \rightarrow a - b = \frac{c}{\sqrt{2}}$

Por tanto el vértice C=P pertenecerá a la hipérbola de focos A y B y cuya diferencia de distancias, a dichos Focos es igual a d= $\frac{AB}{\sqrt{2}}$.

Su construcción.

1.- Dado el segmento AB, determinamos M. punto medio de dicho segmento.



2.- Sobre la mediatriz de AB fijamos el punto M' tal que MM'=MB=MA.

3.- Tomamos un punto cualquiera X sobre la Circunferencia de Centro A y radio AM'.

4.- Sea P, punto donde la mediatriz XB intercepta a la recta AX.

5.- Lugar geométrico del punto P respecto del punto X:

Hipérbola de focos A y B y cuya diferencia de distancias, a dichos Focos es igual a d= $\frac{\mathrm{AB}}{\sqrt{2}}$.