

Problema 716 de triángulos cabri. *Dado el triángulo PAB , sea M el punto medio de AB . Encuentra el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que PM es media proporcional de PA y PB .*

Propuesto por M. Real, y dedicado a F. D. Aranda Ballesteros.

Solución de Francisco Javier García Capitán

Usando la fórmula de la longitud de la mediana PM del triángulo PAB , tenemos

$$\begin{aligned} PA \cdot PB &= PM^2 = \frac{PA^2 + PB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{PA^2 + PB^2}{2} - PA \cdot PB &= \frac{AB^2}{4} \\ \Leftrightarrow (PA - PB)^2 &= \frac{AB^2}{2} \Leftrightarrow PA - PB = \pm \frac{AB}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

es decir el lugar geométrico buscado es una hipérbola equilátera con focos A y B .