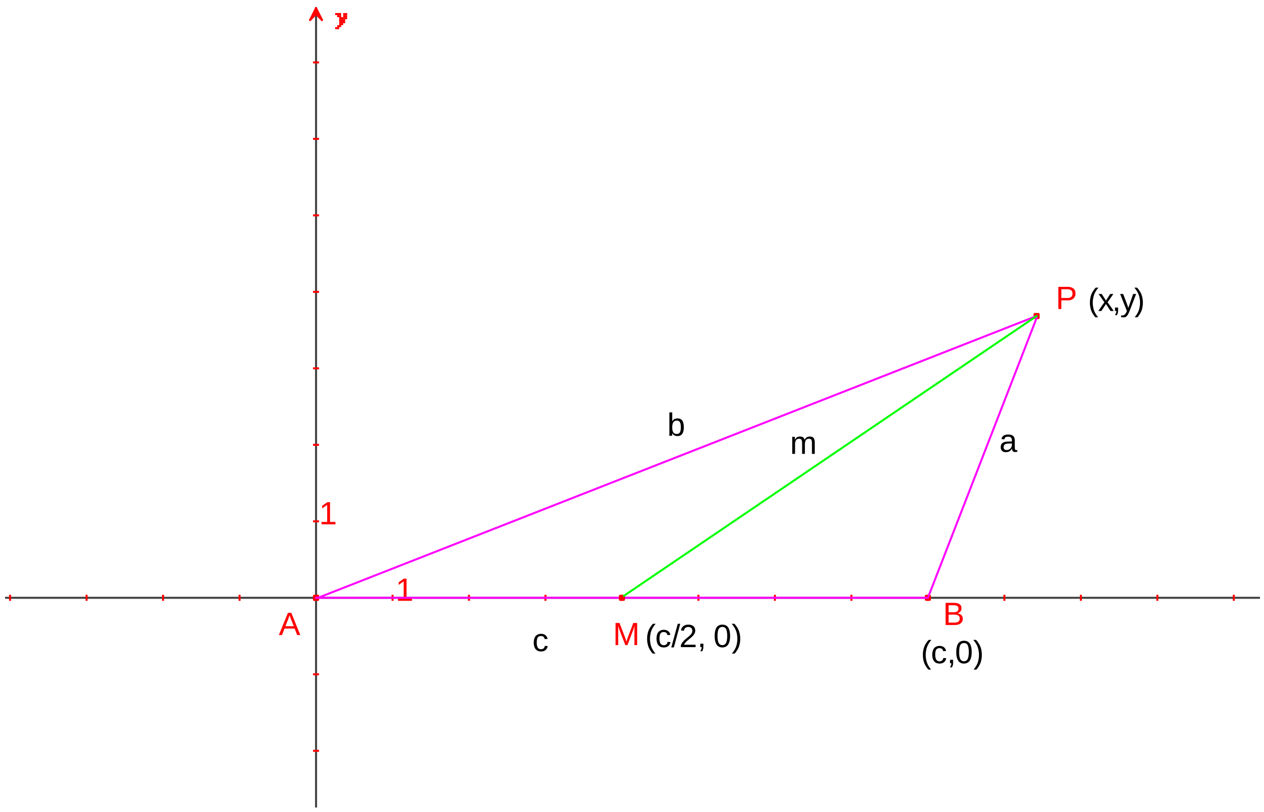
Problema 716

Dado el triángulo PAB, sea M el punto medio de AB. Encuentra el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que PM es media proporcional de PA y PB.

Solución de Inocencio Esquivel García.

Llamemos al lado PA = b;   lado PB = a;   lado AB = c   y   PM = m

Hagamos coincidir el lado AB con el eje x de un sistema de coordenadas.
Según eso las coordenadas de B serían (c,0), las de A (0,0) y las de M (c/2,0)



$Se\ cumple\ que\ \frac{b}{m} = \frac{m}{a} \qquad m^2 = ab$

$Se\ tiene\ que\ m = \sqrt{(x - \frac{c}{2})^2 + y^2} \qquad a = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \qquad b = \sqrt{x^2 + y^2}$

$Luego\ \sqrt{(x - c)^2 + y^2}\ \sqrt{x^2 + y^2} = (x - \frac{c}{2})^2 + y^2 = x^2 + y^2 - xc + \frac{c^2}{4}$

Desarrollando el producto y simplificando se tiene

$$y^2c^2 = x^2c^2 - xc^3 + \frac{c^4}{8} \quad \textit{que es lo mismo} \quad 8y^2 = 8x^2 - 8xc + c^2$$

$$8x^2 - 8xc - 8y^2 = -c^2 \quad \textit{que es la ecuación de una hipérbola}$$

$$8(x^2 - xc + \frac{c^2}{4} - \frac{c^2}{4}) - 8y^2 = -c^2$$

$$8\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{8c^2}{4} - 8y^2 = -c^2 \quad \textit{que es la ecuación}$$

$$\frac{\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}}{\frac{\mathbf{c}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{8}}} - \frac{\mathbf{y}^{\mathbf{2}}}{\frac{\mathbf{c}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{8}}} = \mathbf{1}$$

Como ejemplo tenemos el siguiente, con c = 8.