

Problema 716.

Donat el triangle PAB , siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Determineu el lloc geomètric dels punts P del plànol tal que $\overline{PM}$ és mitja proporcional de $\overline{PA}$ i $\overline{PB}$.

Solució:

Siguen $A(0, 0)$, $B(2a, 0)$ fixos.

Les coordenades de M són $M(a, 0)$.

Siga $P(x, y)$.

$$\overline{PM}^2 = (x - a)^2 + y^2.$$

$$\overline{PA} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\overline{PB} = \sqrt{(x - 2a)^2 + y^2}.$$

$$\overline{PM}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}.$$

$$(x - a)^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{(x - 2a)^2 + y^2}.$$

Elevant al quadrat i simplificant:

$$2x^2 - 2y^2 - 4ax + a^2.$$

$$(x - a)^2 - y^2 - \frac{a^2}{2} = 0.$$

$$\frac{(x - a)^2}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1.$$

És una hipèrbola equilàtera de semieixos $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ i centre M.

