Problema 716.

Dado el triángulo $\overset{\Delta}{PAB}$, sea M el punto medio del lado $\overline{AB}$.
Determinar e lugar geométrico de los puntos P del plano tal que $\overline{PM}$ es media proporcional de $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$.

Solución de Ricard Peiró:
Sean $A(0,0)$, $B(2a,0)$ fijos.
Las coordenadas de M son $M(a,0)$.
Sea $P(x,y)$.

$$\overline{PM}^2=(x-a)^2+y^2.$$

$$\overline{PA}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

$$\overline{PB}=\sqrt{(x-2a)^2+y^2}.$$

$$\overline{PM}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}.$$

$$(x-a)^2+y^2=\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{(x-2a)^2+y^2}.$$

Elevando al cuadrado y simplificado:

$$2x^2-2y^2-4ax+a^2.$$

$$(x-a)^2-y^2-\frac{a^2}{2}=0.$$

$$\frac{(x-a)^2}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1.$$

Es una hipérbola equilátera de semiejes $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ y centro M.