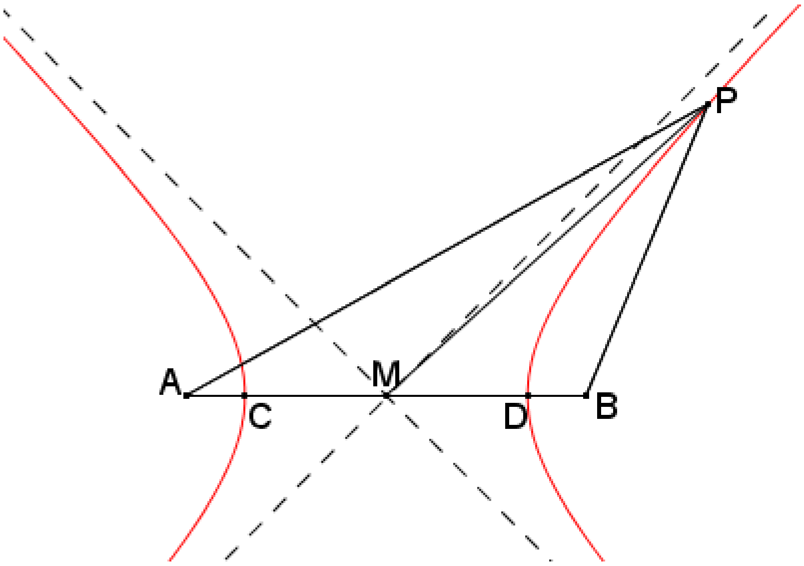
Problema 716

Dado el triángulo PAB, sea M el punto medio de AB. Encuentra el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que PM es media proporcional de PA y PB.

Real, M. (2011): Comunicación personal.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Soit un repère orthonormé de centre M dont l'axe des abcsisses porte la base AB du triangle.
Sans perte de généralité on peut prendre les points A et B d'abscisses respectives – 1 et 1.
Dans ce repère, le sommet P du triangle PAB a pour coordonnées x et y.
Par hypothèse, $PM^2 = PA.PB$ ou encore $PM^4 = PA^2.PB^2$.
Or $PM^2 = x^2 + y^2$, $PA^2 = (x + 1)^2 + y^2$ et $PB^2 = (x - 1)^2 + y^2$.
On en déduit $(x^2 + y^2)^2 = ((x + 1)^2 + y^2).((x - 1)^2 + y^2)$
soit $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = (x^2- 1)^2 + 2(x^2 + 1)y^2 + y^4 = x^4 - 2x^2 + 1 + 2x^2y^2 + 2y^2 + y^4$
Après élimination des termes communs aux deux membres, on obtient : $\mathbf{x^2 - y^2 = 1/2}$
qui est l'équation de **l'hyperbole équilatère** dont les asymptotes sont les bissectrices $y = x$ et $y = - x$ et qui admet A et B pour foyers.