

Problema 716.- Dado el triángulo PAB , sea M el punto medio de AB . Encuentra el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que PM es media proporcional de PA y PB .

Real, M. (2011): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Se pide encontrar P tal que $\frac{PB}{PM} = \frac{PM}{PA}$.

Sin perder generalidad se pueden tomar unos ejes de coordenadas con M como origen y AB de longitud 2; así tenemos $M(0,0)$; $A(-1,0)$; $B(1,0)$ y $P(x,y)$.

Las condiciones del problema se expresan por medio de la ecuación

$$x^2 + y^2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x+1)^2 + y^2}.$$

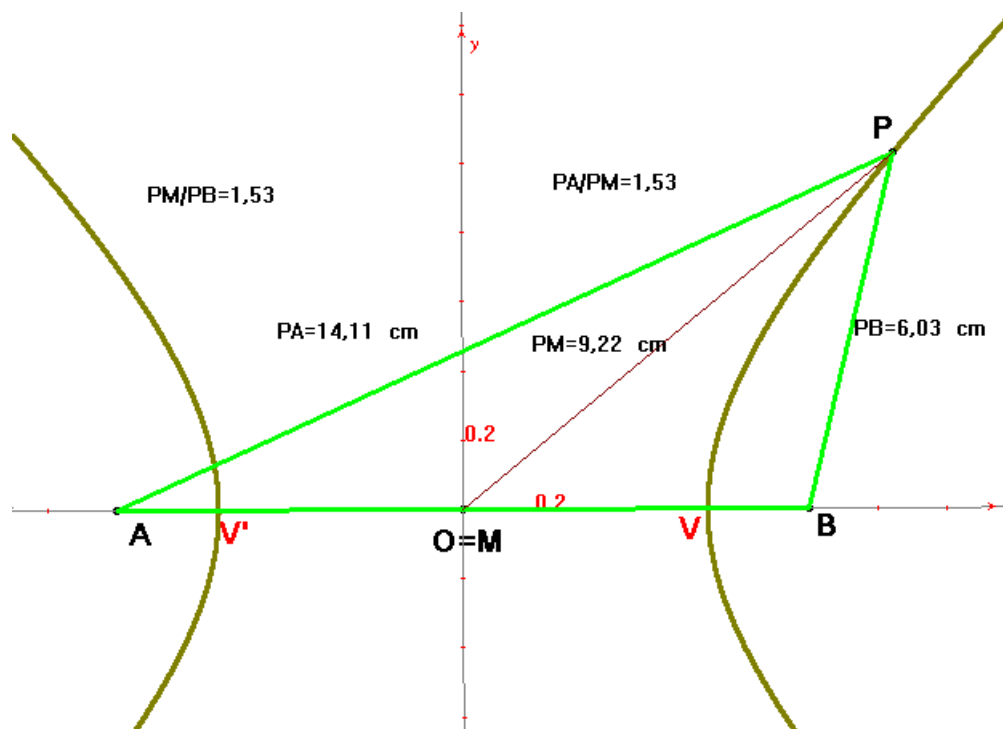
Elevando al cuadrado

$$(x^2 + y^2)^2 = ((x-1)^2 + y^2)((x+1)^2 + y^2)$$

Simplificando adecuadamente se obtiene

$$2(x^2 - y^2) = 1$$

Se trata de una hipérbola equilátera de focos los puntos A y B , como se muestra en la figura siguiente



■