

Problema 717.-

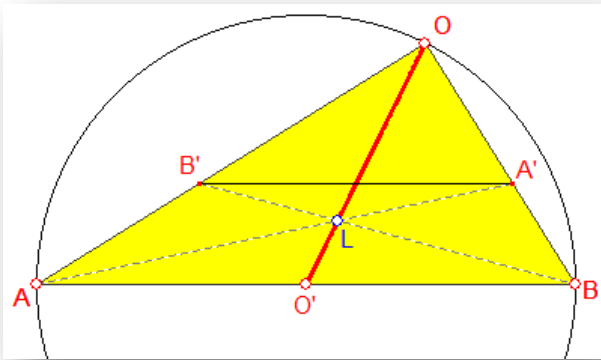
a1) En un triángulo rectángulo OAB una recta r paralela a la hipotenusa corta a los catetos OA y OB en los puntos A' y B' respectivamente. Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' que se obtienen al variar dicha paralela.

Martínez, J. (1969): Elementos de Matemáticas. (p. 530)

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Sea el triángulo rectángulo OAB. La paralela media a la hipotenusa $A'B'$ determina la proporción $\frac{OA'}{A'B} = \frac{OB'}{AB'}$. Consideramos las cevianas concurrentes en L, AA' , BB' y OO' . Por el Teorema de Ceva, sucederá que:

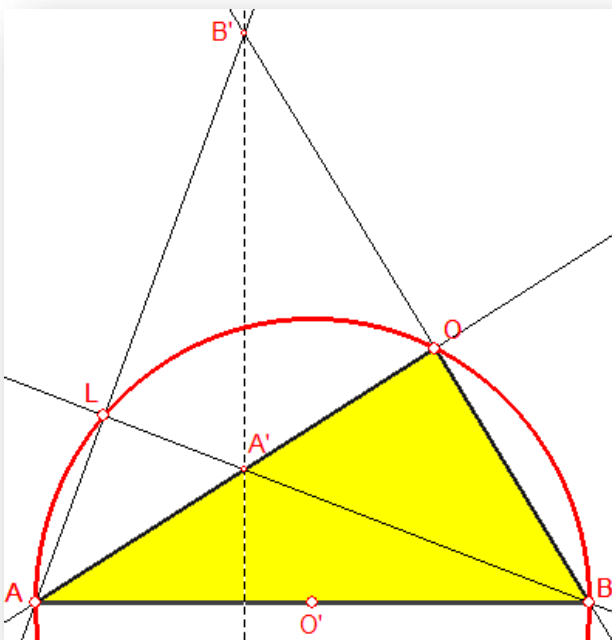
$$\frac{OB'}{B'A} \frac{AO'}{O'B} \frac{A'B}{OA'} = 1 \rightarrow \frac{AO'}{O'B} = \frac{OA'}{A'B} \frac{AB'}{OB'} = 1 \rightarrow AO' = O'B$$



Por tanto, la tercera ceviana interceptará al lado AB en su punto medio O' . De esta forma, L pertenecerá a la mediana OO' y como el triángulo es rectángulo en O, esta mediana será el radio $O'O$ de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo ABC.

Propuesta complementaria 1 (Triángulo rectángulo).

b1) En un triángulo rectángulo OAB una recta s perpendicular a la hipotenusa corta a los catetos OA y OB en los puntos A' y B' respectivamente. Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' que se obtienen al variar dicha perpendicular.



Solución:

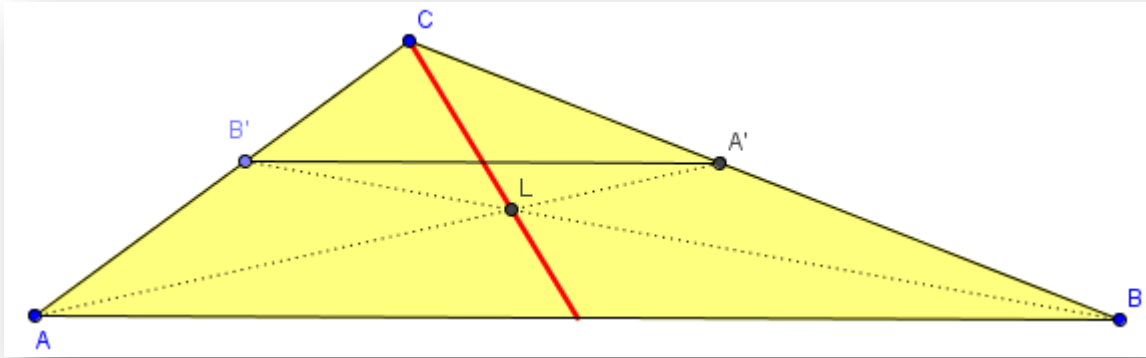
Realizada la construcción, observamos que el punto A' es el ortocentro del triángulo auxiliar $AB'B$ ya que dos de sus alturas, AO y la recta s pasan por el punto A' . La tercera altura, BL también deberá pasar pues por el punto A' . De esta forma, BL es perpendicular en L al lado AB' . Y esto solo será posible si y sólo si el punto L, punto común a las rectas AB' y BA' , está situado sobre la circunferencia de diámetro AB.

Propuesta complementaria 2 (Triángulo obtusángulo en C).

a2) Hallar el lugar de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' si ABC es obtusángulo en C , y r es paralela a AB , cortando a los lados CB y CA en los puntos A' y B' respectivamente.

Solución:

Siguiendo el mismo razonamiento realizado anteriormente, L pertenecerá a la mediana CC' .



b2) En un triángulo CAB , obtusángulo en C , una recta s perpendicular a AB corta a los lados CB y CA en los puntos B' y A' respectivamente. Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' que se obtienen al variar dicha perpendicular.

Solución:

El lugar geométrico indicado es la elipse que circunscribe al triángulo ABC . Para poder probar en su justa medida este hecho vamos a utilizar la Geometría de coordenadas. Sea el sistema de ejes coordenados el

determinado por el lado AB (Eje x) y la mediatriz del segmento AB (Eje y).

Si O , punto medio del lado AB es el origen de coordenadas, entonces los vértices del triángulo ABC serán:

$$A = (-r, 0),$$

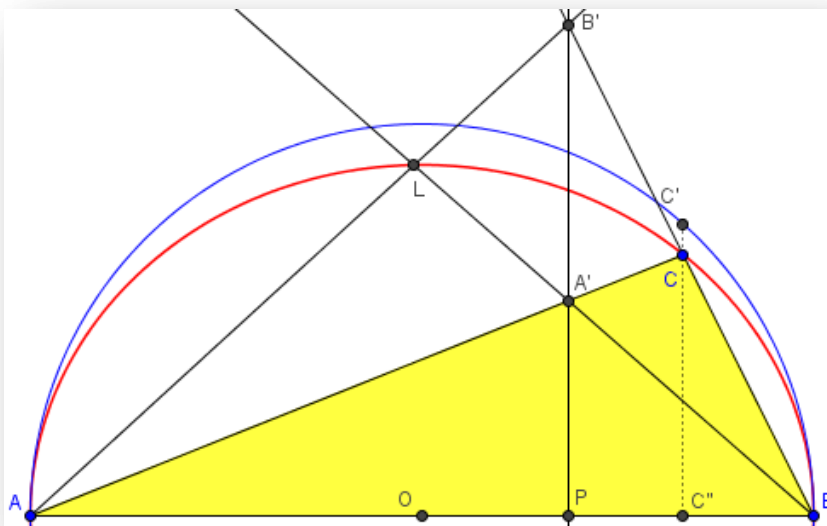
$$B = (r, 0),$$

$$C = (c_1, c_2)$$

La proyección sobre el eje x de la circunferencia de centro O y radio r nos proporcionará el valor de la razón k de la

homotecia que transforma dicha circunferencia en la elipse deseada. Como el punto $C' = (c_1, \sqrt{r^2 - c_1^2})$ se transformará en el vértice $C = (c_1, c_2)$, el valor de $k = \frac{c_2}{\sqrt{r^2 - c_1^2}}$. De esta forma, la elipse será la que tiene

por ecuación $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{\frac{c_2^2 r^2}{r^2 - c_1^2}} = 1$.



Sea P un punto cualquiera del segmento AB. Por tanto, $P = (rt - (1-t)r, 0)$, siendo $t \in [0,1]$. La recta s perpendicular a AB por el punto P será $x = (2t-1)r$ que, cortará al lado BC de ecuación $y = \frac{c_2}{c_1-r}(x-r)$ en el punto $B' = ((2t-1)r, \frac{2c_2r(t-1)}{c_1-r})$.

La recta s, perpendicular a AB por el punto P cortará al lado AC, de ecuación $y = \frac{c_2}{c_1+r}(x+r)$ en el punto $A' = ((2t-1)r, \frac{2c_2rt}{c_1+r})$. La recta BA' será $y = \frac{(t-1)c_2(x+r)}{t(c_1-r)}$. La recta AB' será $y = \frac{tc_2(x-r)}{(t-1)(c_1+r)}$.

El punto L, intersección de ambas rectas será $L = (\frac{r(r(-1+2t)+(-1+2t-2t^2)c_1)}{r-2rt+2rt^2+c_1-2tc_1}, \frac{2r(1-t)tc_2}{r-2rt+2rt^2+c_1-2tc_1})$

Veamos que este punto L verifica, en efecto, la ecuación de la elipse: $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{\frac{c_2^2 r^2}{r^2 - c_1^2}} = 1$.

$$\frac{((-1+2t)+(-1+2t-2t^2)c_1)^2}{(r-2rt+2rt^2+c_1-2tc_1)^2} + \frac{4(1-t)^2 t^2 (r^2 - c_1^2)}{(r-2rt+2rt^2+c_1-2tc_1)^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$((-1+2t)+(-1+2t-2t^2)c_1)^2 + 4(1-t)^2 t^2 (r^2 - c_1^2) = (r-2rt+2rt^2+c_1-2tc_1)^2$$

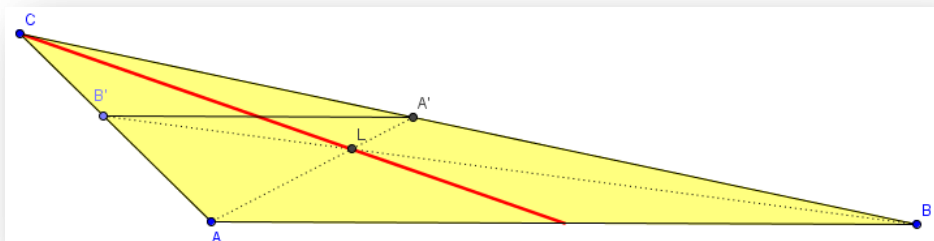
Desarrollando ambas expresiones validamos la igualdad deseada.

Propuesta complementaria 3 (Triángulo obtusángulo en A).

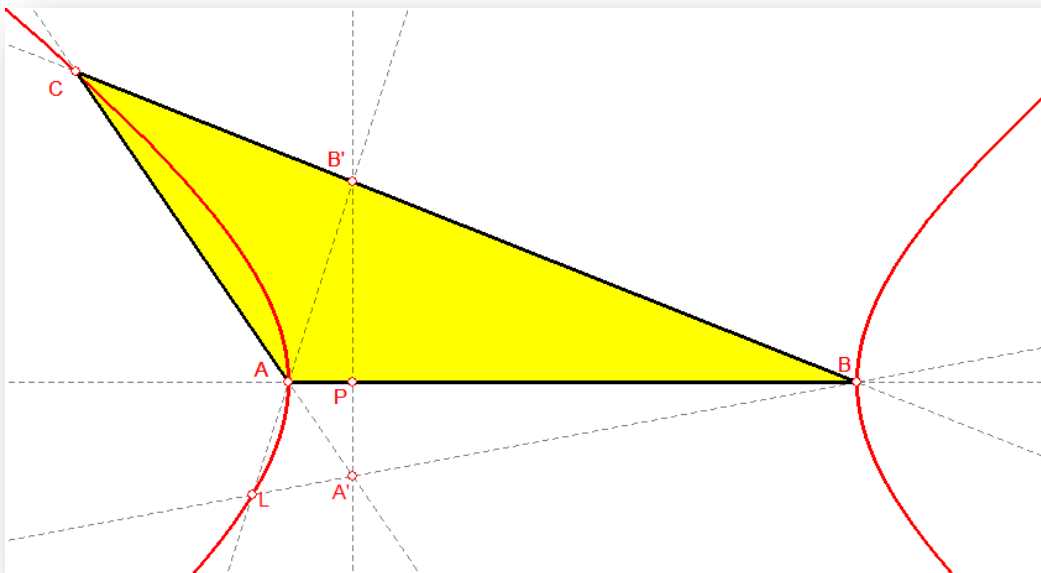
a3) Hallar el lugar de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' si ABC es obtusángulo en A, y r es paralela a AB, cortando a los lados CB y CA en los puntos A' y B' respectivamente.

Solución:

Siguiendo el mismo razonamiento realizado anteriormente, L pertenecerá a la mediana CC'.



b3) En un triángulo CAB, obtusángulo en A, una recta s perpendicular a AB corta a los lados CB y CA en los puntos B' y A' respectivamente. Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' que se obtienen al variar dicha perpendicular.



Solución:

El lugar geométrico indicado es la hipérbola que circunscribe al triángulo ABC. Para poder probar en su justa medida este hecho vamos a utilizar la Geometría de coordenadas. Sea el sistema de ejes coordenados el determinado por el lado AB (Eje x) y la mediatriz del segmento AB (Eje y).

Si O, punto medio del lado AB es el origen de coordenadas, entonces los vértices del triángulo ABC serán:

$$A = (-r, 0), B = (r, 0), C = (c_1, c_2).$$

Como la hipérbola considerada habrá de pasar por los vértices ABC de dicho triángulo, su ecuación será de la forma $\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{\frac{c_2^2 r^2}{c_1^2 - r^2}} = 1$.

Sea P un punto cualquiera del lado AB. Por tanto, $P = (rt - (1-t)r, 0)$, siendo $t \in R$.

La recta s perpendicular a AB por el punto P será $x = (2t-1)r$ que, cortará al lado BC de ecuación $y = \frac{c_2}{c_1-r}(x-r)$ en el punto $B' = ((2t-1)r, \frac{2c_2 r(t-1)}{c_1-r})$.

La recta s, perpendicular a AB por el punto P cortará al lado AC, de ecuación $y = \frac{c_2}{c_1+r}(x+r)$ en el punto

$$A' = ((2t-1)r, \frac{2c_2 r t}{c_1+r}). \text{ La recta } BA' \text{ será } y = \frac{(t-1)c_2(x+r)}{t(c_1-r)}. \text{ La recta } AB' \text{ será } y = \frac{tc_2(x-r)}{(t-1)(c_1+r)}.$$

$$\text{El punto L, intersección de ambas rectas será } L = \left(\frac{r(r(-1+2t)+(-1+2t-2t^2)c_1)}{r-2rt+2rt^2+c_1-2tc_1}, \frac{2r(1-t)tc_2}{r-2rt+2rt^2+c_1-2tc_1} \right)$$

Veamos que este punto L verifica, en efecto, la ecuación de la hipérbola: $\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{\frac{c_2^2 r^2}{c_1^2 - r^2}} = 1$.

Es la misma sustitución simbólica realizada en el caso anterior.

Observamos que esta expresión

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{\frac{c_2^2 r^2}{r^2 - c_1^2}} = 1 \text{ da lugar a una elipse si } r > c_1 \rightarrow \text{Caso 2}$$

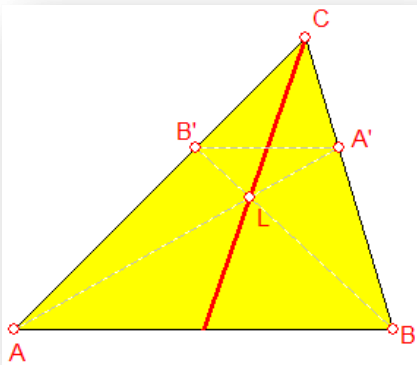
$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{\frac{c_2^2 r^2}{r^2 - c_1^2}} = 1 \text{ da lugar a una hipérbola si } r < c_1 \rightarrow \text{Caso 3}$$

Propuesta complementaria 4 (Triángulo acutángulo).

a4) Hallar el lugar de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' si ABC es acutángulo, y r es paralela a AB, cortando a los lados CB y CA en los puntos A' y B' respectivamente.

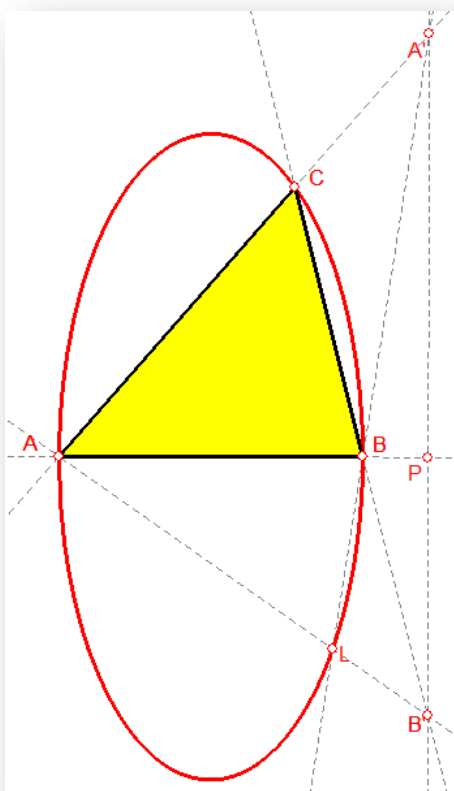
Solución:

Siguiendo el mismo razonamiento realizado anteriormente, L pertenecerá a la mediana CC'.



B4) En un triángulo acutángulo CAB, una recta s perpendicular a AB corta a los lados CB y CA en los puntos B' y A' respectivamente. Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' que se obtienen al variar dicha perpendicular.

Solución: $A = (-r, 0), B = (r, 0), C = (c_1, c_2)$. Elipse de ecuación $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{\frac{c_2^2 r^2}{r^2 - c_1^2}} = 1$. (Semieje menor AB)



B'4) En un triángulo acutángulo CAB, una recta s perpendicular a BC corta a los lados CB y CA en los puntos B' y A' respectivamente. Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' que se obtienen al variar dicha perpendicular.

Solución: $A = (-r, 0), B = (r, 0), C = (c_1, c_2)$. Hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{\frac{c_2^2 r^2}{c_1^2 - r^2}} = 1$.

