

Problema 717

a) En un triángulo rectángulo OAB una recta r paralela a la hipotenusa corta a los catetos OA y OB en los puntos A' y B' respectivamente.

Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' que se obtienen al variar dicha paralela.

Martínez, J. (1969): Elementos de Matemáticas. (p. 530)

Propuesta complementaria.

b) En un triángulo rectángulo OAB una recta s perpendicular a la hipotenusa corta a los catetos OA y OB en los puntos A' y B' respectivamente.

Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' que se obtienen al variar dicha perpendicular.

a1) Hallar el lugar de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' si ABC es acutángulo, y r es paralela a AB , cortando a los lados CB y CA en los puntos A' y B' respectivamente.

a2) Hallar el lugar de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' si ABC es obtusángulo, y r es paralela a AB , cortando a los lados CB y CA en los puntos A' y B' respectivamente.

b1) En un triángulo acutángulo CAB una recta s perpendicular a AB corta a los lados CB y CA en los puntos B' y A' respectivamente.

Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' que se obtienen al variar dicha perpendicular.

b2) En un triángulo obtusángulo en C , CAB , una recta s perpendicular a AB corta a los lados CB y CA en los puntos B' y A' respectivamente.

Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' que se obtienen al variar dicha perpendicular.

c) En un triángulo acutángulo trazamos una recta s perpendicular a BC , que corta a los lados CB y CA en los puntos B' y A' respectivamente.

Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' que se obtienen al variar dicha perpendicular.

c1) En un triángulo obtusángulo en A , trazamos una recta s perpendicular a BC , que corta a los lados CB y CA en los puntos B' y A' respectivamente.

Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' que se obtienen al variar dicha perpendicular.

Barroso, R. (2014): Comunicación personal.

Solución del director.

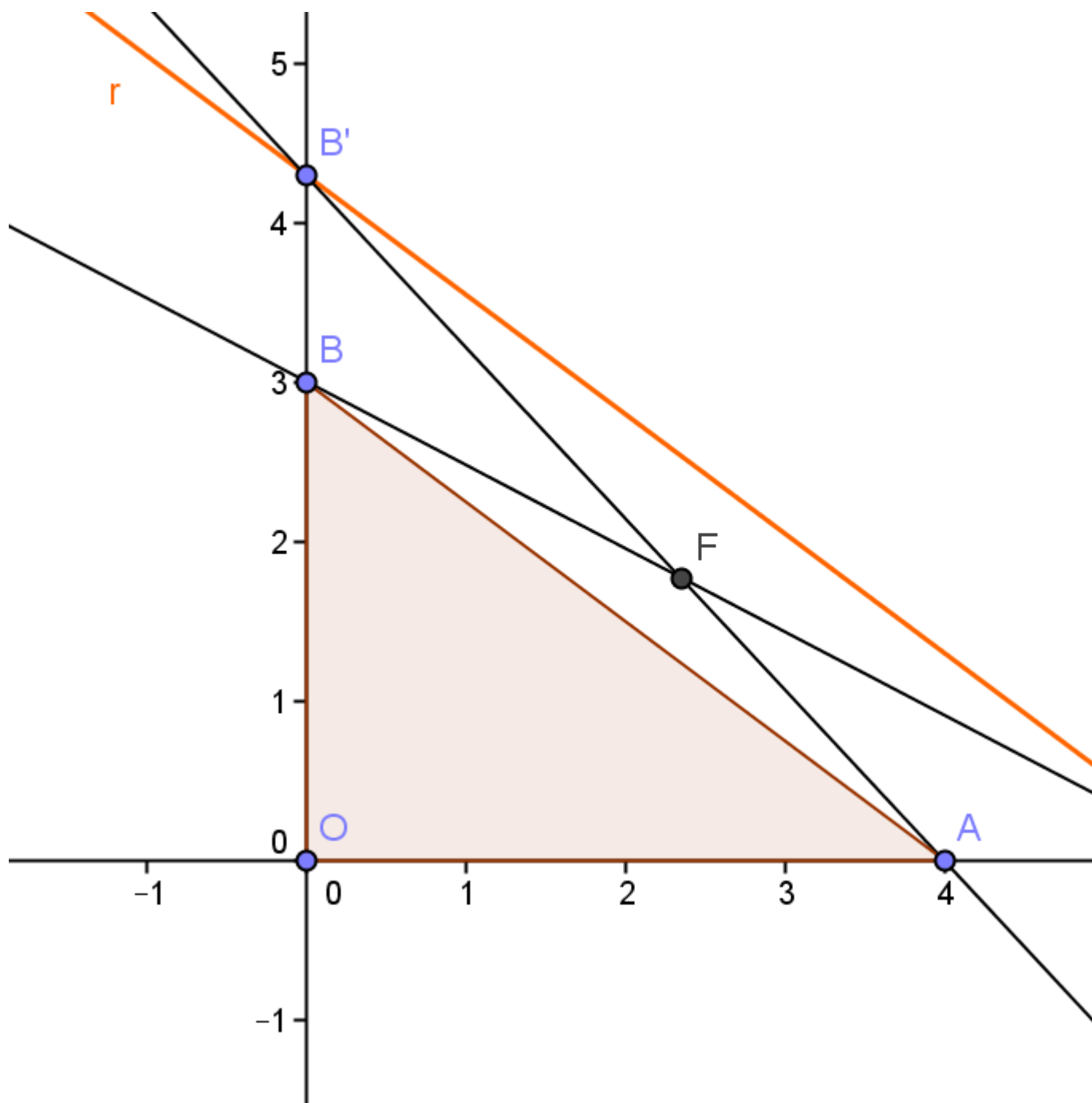
a) En un triángulo rectángulo OAB una recta r paralela a la hipotenusa corta a los catetos OA y OB en los puntos A' y B' respectivamente.

Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' que se obtienen al variar dicha paralela.

Solución euclídea:

El cuadrilátero $AA'B'B$ es un trapecio.

Sus diagonales se cortan sobre el segmento que une sus puntos medios.



Así, el lugar pedido es la recta que contiene a la mediana del vértice O del ángulo recto.

Solución analítica:

Sean $A(a,0)$, $B(0,b)$, $A'(a\lambda,0)$, $B'(0,b\lambda)$.

La recta AB' es: $\frac{y-b\lambda}{-b\lambda} = \frac{x}{a}$

La recta $A'B$ es: $\frac{y-b}{-b} = \frac{x}{a\lambda}$

Haciendo operaciones obtenemos $y = \frac{b}{a}x$, que es la recta que contiene a la mediana del vértice O del ángulo recto.

a) En un triángulo rectángulo OAB una recta r paralela a la hipotenusa corta a los catetos OA y OB en los puntos A' y B' respectivamente.

Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' que se obtienen al variar dicha paralela

a) En un triángulo rectángulo OAB una recta r paralela a la hipotenusa corta a los catetos OA y OB en los puntos A' y B' respectivamente.

Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' que se obtienen al variar dicha paralela

b)

En un triángulo rectángulo OAB una recta s perpendicular a la hipotenusa corta a los catetos OA y OB en los puntos A' y B' respectivamente.

Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' que se obtienen al variar dicha perpendicular.

Solución euclídea.

Consideremos que la recta s contiene a B. Es $OB' = OB$. En tal caso, $AB' \cap A'B = B$. Luego B pertenece al lugar.

Consideremos que la recta s contiene a A. Es $OA' = OA$. En tal caso $AB' \cap A'B = A$. Así, A pertenece al lugar buscado.

La recta B'A será $y = \frac{-b\lambda}{a}x + 2b\lambda$, y la recta A'B $y = \frac{a}{b\lambda}x + 2b$.

El punto de intersección de B'A con A' B es:

$$P\left(\frac{2ab^2\lambda^2 - 2ab^2\lambda}{a^2 + b^2\lambda^2}, \frac{2a^2b\lambda + 2b^3\lambda^2}{a^2 + b^2\lambda^2}\right)$$

El punto P pertenece a la circunferencia circunscrita a OAB cuyo centro es (a,b) y radio es $\sqrt{a^2 + b^2}$:

Halleemos el valor de

$$\left(\frac{2ab^2\lambda^2 - 2ab^2\lambda}{a^2 + b^2\lambda^2} - a\right)^2 + \left(\frac{2a^2b\lambda + 2b^3\lambda^2}{a^2 + b^2\lambda^2} - b\right)^2$$

$$\frac{(ab^2\lambda^2 - 2ab^2\lambda - a^3)^2 + (2a^2b\lambda + b^3\lambda^2 - a^2b)^2}{a^4 + 2a^2b^2\lambda^2 + a^4b^4}$$

Desarrollando, simplificando y sacando factores comunes se tiene:

$$\frac{(a^4 + 2a^2b^2\lambda^2 + a^4b^4)(a^2 + b^2)}{a^4 + 2a^2b^2\lambda^2 + a^4b^4} = a^2 + b^2, \text{ c.q.d.}$$