a) En un triángulo rectángulo OAB una recta r paralela a la hipotenusa corta a los catetos OA y OB en los puntos A' y B' respectivamente.

Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' que se obtienen al variar dicha paralela.

Martínez, J. (1969): Elementos de Matemáticas. (p. 530)

Propuesta complementaria.

b) En un triángulo rectángulo OAB una recta s perpendicular a la hipotenusa corta a los catetos OA y OB en los puntos A' y B' respectivamente.

Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' que se obtienen al variar dicha perpendicular.

- a1) Hallar el lugar de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' si ABC es acutángulo, y r es paralela a AB, cortando a los lados CB y CA en los puntos A' y B' respectivamente.
- a2) Hallar el lugarde los puntos comunes a las rectas AB' y BA' si ABC es obtusángulo, y r es paralela a AB, cortando a los lados CB y CA en los puntos A' y B' respectivamente.
- b1) En un triángulo acutángulo CAB una recta s perpendicular a AB corta a los lados CB y CA en los puntos B' y A' respectivamente.

Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' que se obtienen al variar dicha perpendicular.

b2) En un triángulo obtusángulo en C, CAB, una recta s perpendicular a AB corta a los lados CB y CA en los puntos B' y A' respectivamente.

Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' que se obtienen al variar dicha perpendicular.

c) En un triángulo acutángulo trazamos una recta s perpendicular a BC, que corta a los lados CB y CA en los puntos B' y A' respectivamente.

Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' que se obtienen al variar dicha perpendicular.

c1) En un triángulo obtusángulo en A, trazamos una recta s perpendicular a BC, que corta a los lados CB y CA en los puntos B' y A' respectivamente.

Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' que se obtienen al variar dicha perpendicular.

Barroso, R. (2014): Comunicación personal.

Solución del director.

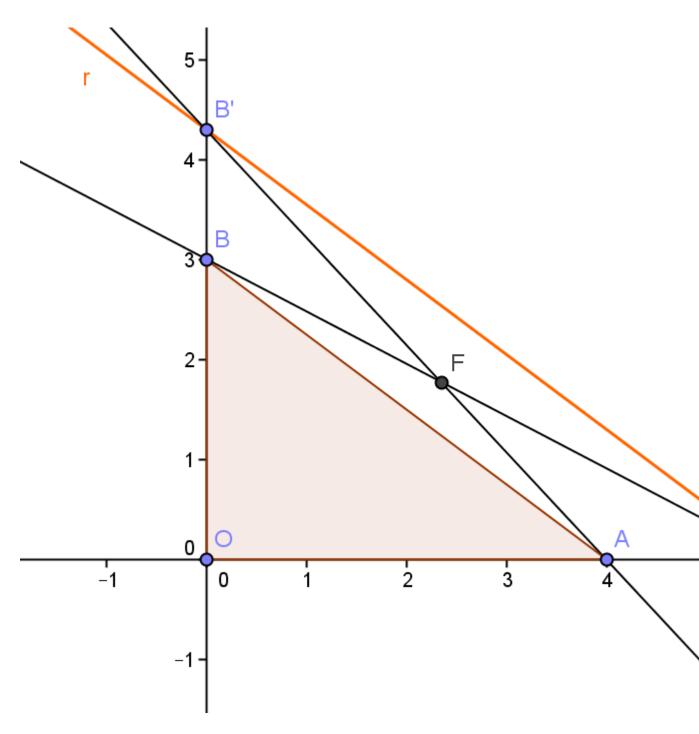
a) En un triángulo rectángulo OAB una recta r paralela a la hipotenusa corta a los catetos OA y OB en los puntos A' y B' respectivamente.

Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' que se obtienen al variar dicha paralela.

Solución euclídea:

El cuadrilátero AA'B'B es un trapecio.

Sus diagonales se cortan sobre el segmento que une sus puntos medios.



Así, el lugar pedido es la recta que contiene a la mediana del vértice O del ángulo recto.

Solución analítica:

Sean A(a,0), B(0,b), A'(a $\lambda$ ,0), B'(0,b $\lambda$ ).

La recta AB' es:  $\frac{y-b\lambda}{-b\lambda} = \frac{x}{a}$ 

La recta A'B es:  $\frac{y-b}{-b} = \frac{x}{a\lambda}$ 

Haciendo operaciones obtenemos  $y = \frac{b}{a}x$ , que es la recta que contiene a la mediana del vértice O del ángulo recto.

a) En un triángulo rectángulo OAB una recta r paralela a la hipotenusa corta a los catetos OA y OB en los puntos A' y B' respectivamente.

Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' que se obtienen al variar dicha paralelaa) En un triángulo rectángulo OAB una recta r paralela a la hipotenusa corta a los catetos OA y OB en los puntos A' y B' respectivamente.

Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' que se obtienen al variar dicha paralela

b)

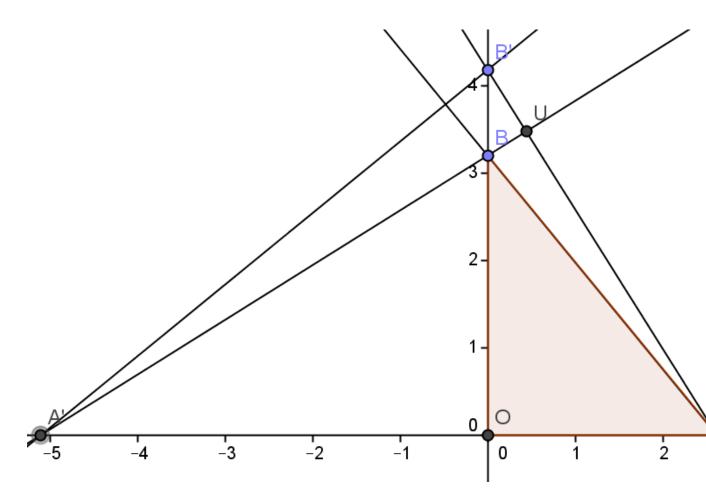
En un triángulo rectángulo OAB una recta s perpendicular a la hipotenusa corta a los catetos OA y OB en los puntos A' y B' respectivamente.

Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' que se obtienen al variar dicha perpendicular.

Solución euclídea.

Consideremos que la recta s contiene a B. Es OB' =OB. En tal caso, AB'∩ A'B=B. Luego B pertenece al lugar.

Consideremos que la recta s contiene a A. Es OA'=OA. En tal caso AB'∩ A'B=A. Así, A pertenece al lugar buscado.



Sea s una recta que corte a OB en un punto B' diferente a B y a OA en un punto A' diferente a OA.

Si consideramos el triángulo B'A'A, la recta B'O será una altura del mismo,

La recta AB será otra altura del mismo, por lo que B será el ortocentro de tal triángulo, lo que significa

que A'B será la tercera altura y cortará a AB' en un punto U, de manera que el ángulo BUA es recto.

Así el lugar de U es la circunferencia circunscrita a OAB.

Solución analítica.

Podemos elegir O(0,0), A(2a,0), B(0,2b)

Así la recta AB es 
$$y = \frac{-b}{a}x + 2b$$

Sea B' (0,2b $\lambda$ ), la recta s será  $y = \frac{a}{b}x + 2b\lambda$ 

La recta B'A será  $y = \frac{-b\lambda}{a}x + 2b\lambda$ , y la recta A'B  $y = \frac{a}{b\lambda}x + 2b$ .

El punto de intersección de B'A con A' B es:

$$P(\frac{2ab^2\lambda^2 - 2ab^2\lambda}{a^2 + b^2\lambda^2}, \frac{2a^2b\lambda + 2b^3\lambda^2}{a^2 + b^2\lambda^2})$$

El punto P pertenece a la circunferencia circunscrita a OAB cuyo centro es (a,b) y radio es  $\sqrt{a^2 + b^2}$ :

Hallemos el valor de

$$(\frac{2ab^2\lambda^2 - 2 a b^2\lambda}{a^2 + b^2\lambda^2} - a)^2 + (\frac{2a^2b\lambda + 2 b^3\lambda^2}{a^2 + b^2\lambda^2} - b)^2$$

$$\frac{(ab^2\lambda^2 - 2 a b^2\lambda - a^3)^2 + (2a^2b\lambda + b^3\lambda^2 - a^2b)^2}{a^4 + 2a^2b^2\lambda^2 + a^4b^4}$$

Desarrollando, simplificando y sacando factores comunes se tiene:

$$\frac{(a^4 + 2a^2b^2\lambda^2 + a^4b^4)(a^2 + b^2)}{a^4 + 2a^2b^2\lambda^2 + a^4b^4} = a^2 + b^2, \text{ c.q.d.}$$