Problema 717 de triánguloscabri. a. *En un triángulo rectángulo OAB una recta r paralela a la hipotenusa corta a los catetos OA y OB en los puntos A' y B' respectivamente. Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' que se obtienen al variar dicha paralela.*

Martínez, J. (1969): Elementos de Matemáticas. (p. 530)

Solución de Francisco Javier García Capitán

La aplicación $A' \to B'$ de la recta OA en la recta OB es una homografía. Es más, es una proyección, y cuando la paralela pasa por O tenemos $A' = O = B'$, por lo tanto, el eje de homografía pasa por O. Como cuando la paralela a la AB es la recta que pasa por los puntos medios de los OA y OB, el punto $AB' \cap BA'$ es el baricentro del triángulo, el lugar geométrico buscado es la mediana del triángulo correspondiente al vértice O.

Exactamente el mismo razonamiento sirve para responder a los enunciados:

a1. *Hallar el lugar de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' si ABC es acutángulo, y r es paralela a AB, cortando a los lados CB y CA en los puntos A' y B' respectivamente.*

a2. *Hallar el lugar de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' si ABC es obtusángulo, y r es paralela a AB, cortando a los lados CB y CA en los puntos A' y B' respectivamente.*

Ahora, consideramos los cinco enunciados siguientes:

b. *En un triángulo rectángulo OAB una recta s perpendicular a la hipotenusa corta a los catetos OA y OB en los puntos A' y B' respectivamente. Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' que se obtienen al variar dicha perpendicular.*

b1. *En un triángulo acutángulo CAB una recta s perpendicular a AB corta a los lados CB y CA en los puntos B' y A' respectivamente. Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' que se obtienen al variar dicha perpendicular.*

b2. *En un triángulo obtusángulo en C , CAB, una recta s perpendicular a AB corta a los lados CB y CA en los puntos B' y A' respectivamente. Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' que se obtienen al variar dicha perpendicular.*

c. *En un triángulo acutángulo trazamos una recta s perpendicular a BC, que corta a los lados CB y CA en los puntos B' y A' respectivamente. Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' que se obtienen al variar dicha perpendicular.*

c1. *En un triángulo obtusángulo en A, trazamos una recta s perpendicular a BC, que corta a los lados CB y CA en los puntos B' y A' respectivamente. Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB' y BA' que se obtienen al variar dicha perpendicular.*

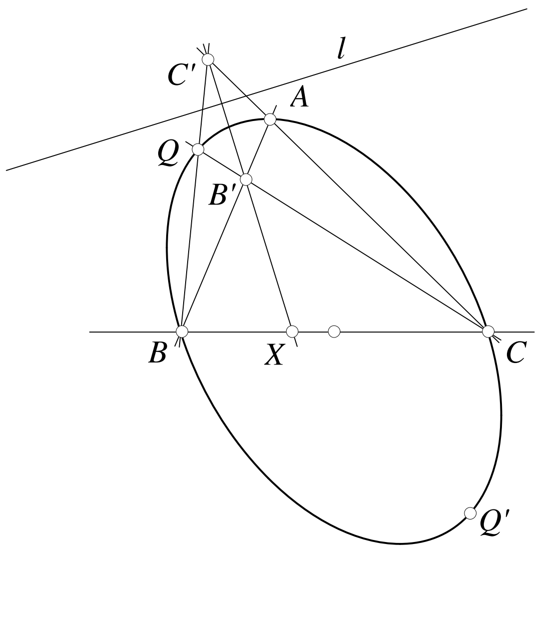
De igual forma que en el encunciado **a** no interviene que el triángulo sea rectángulo, acutángulo u obtusángulo, podemos considerar los cinco enunciados anteriores como caso particular del problema siguiente:

d. *Sean ABC un triángulo y ℓ una recta cualquiera. Una recta variable perpendicular a ℓ corta AB y AC en los puntos B' y C'. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección $BC' \cap CB'$ al variar dicha perpendicular.*

En este caso la aplicación $B' \to C'$ es una homografía, pero no es una proyección, por lo que el lugar de los puntos de intersección $BC' \cap CB'$ es una *cónica* que pasa por B y C, siendo las tangentes a la cónica en estos puntos las perpendiculares a ℓ trazadas por ellos. El vértice A también está sobre la cónica, ya que se obtiene cuando se considera la perpendicular a ℓ trazada por A. Por tanto, conocemos tres puntos por los que pasa la cónica y las tangentes en dos de ellos, por lo que podemos trazar la cónica.

Pero, para hacerlo más fácil, hemos dicho que las tangentes en B y en C son ambas perpendiculares a ℓ y por tanto paralelas, por lo que el polo de la recta BC, que es el punto de intersección de ambas tangentes, estará en el infinito. Como consecuencia, el centro de la cónica, que es el polo de la recta del infinito, deberá estar sobre la recta BC, y debe ser el punto medio de BC.

Construcción de la cónica. En la figura siguiente, P es un punto cualquiera y ℓ es la polar trilineal de P respecto de ABC. Por un punto cualquiera X de BC trazamos una perpendicular a ℓ, que corta en B' y C' a AB y AC respectivamente. Al variar X sobre BC, el punto $Q = BC' \cap CB'$ describe la cónica $\Gamma(P)$. Sabiendo que el punto medio de BC es el centro de la cónica, con A, B, C, Q y el punto simétrico de Q respecto del punto medio de BC tenemos cinco puntos de la cónica.



Análisis de la cónica, primera parte. Si consideramos ℓ como la polar trilineal de un punto P, ¿qué tipo de cónica es la cónica que hemos obtenido, que llamaremos $\Gamma(P)$, según las posiciones de P?

Usando coordenadas baricéntricas, si $P = (u : v : w)$, podemos ver que $\Gamma(P)$ tiene la ecuación

$$\begin{aligned}&\left(S_B uv + S_C uw - a^2 vw\right) yz\\ =&\left(S_C vw + S_A vu - b^2 wu\right) zx + \left(S_A wu + S_B wv - c^2 uv\right) xy,\end{aligned}$$

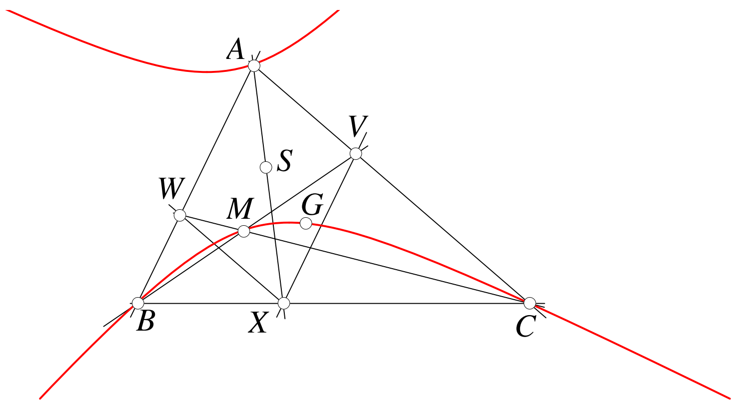
y el discriminante de esta cónica es la expresión

$$\delta(P) = -4(S_C vw - b^2 wu + S_A uv)(S_B vw + S_A wu - c^2 uv),$$

por lo que el tipo de cónica va a depender de la posición de P respecto de las circuncónicas Γ_b y Γ_c que tienen por perspectores los puntos $J_b = (S_C : -b^2 : S_A)$ y $J_c = (S_B : S_A : -c^2)$, que son los puntos del infinito de las perpendiculares a CA y AB respectivamente.

Construcción de una circuncónica con perspector infinito. Para acabar de hacer el análisis, presentamos un método original para construir una circuncónica con perspector un punto del infinito. Concretamente, dado un punto S veamos cómo es la construcción de la circuncónica $pyz + qzx + rxy = 0$ cuyo perspector es el punto del infinito $(p : q : r)$ de la recta AS.

En primer lugar, observemos que por ser $p+q+r = 0$, la circuncónica pasará por el baricentro G del triángulo ABC.

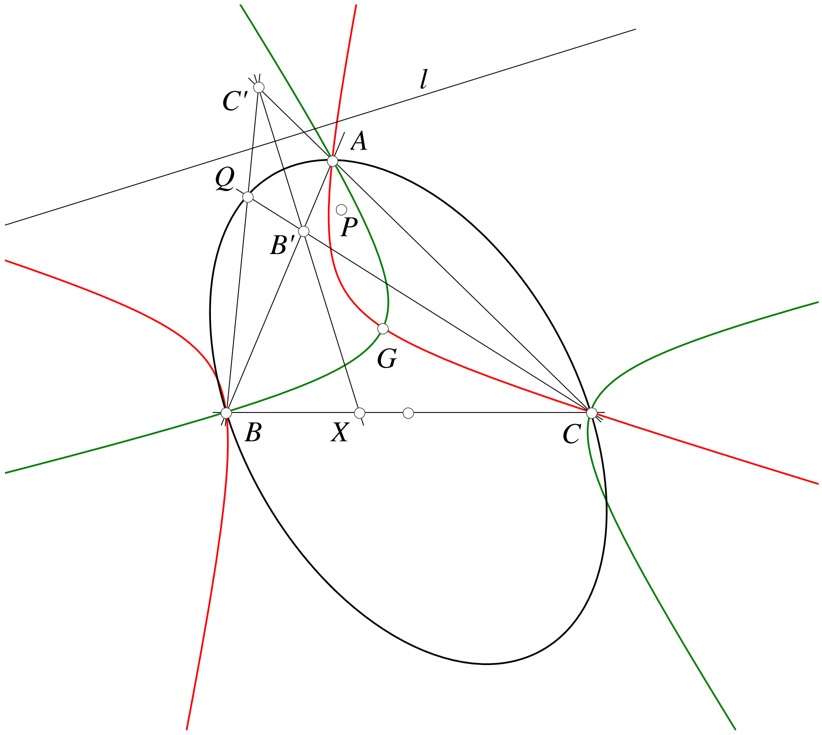


Necesitamos un quinto punto de la cónica. Para obtenerlo, hallamos $X = AS \cap BC$ y trazamos paralelas a AB y AC por X que cortan en V y W a AC y AB respectivamente. Pues bien, el punto $M = BV \cap CW$ está sobre la cónica buscada. En efecto, puede obtenerse que $M = (qr : q^2 : r^2)$, que, de nuevo por ser $p + q + r = 0$ cumple la ecuación $pyz + qzx + rxy = 0$.

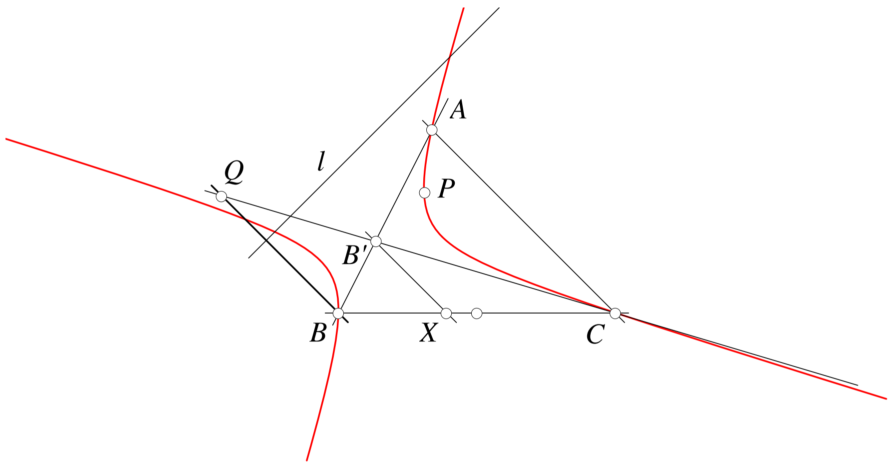
Observemos además que el punto medio de $A = (qr + q^2 + r^2 : 0 : 0)$ y $M = (qr : q^2 : r^2)$ es el punto $((q + r)^2 : q^2 : r^2) = (p^2 : q^2 : r^2)$, que es el centro de la circuncónica.

Análisis de la cónica, segunda parte. Usando la construcción anterior, podemos dibujar las cónicas Γ_b y Γ_c que, como hemos dicho, tienen por perspectores los puntos del infinito de las alturas BH y CH.

Cada vez que el punto P atraviese alguna de las dos hipérbolas Γ_b y Γ_c, la cónica $\Gamma(P)$ pasará de elipse a hipérbola o viceversa.

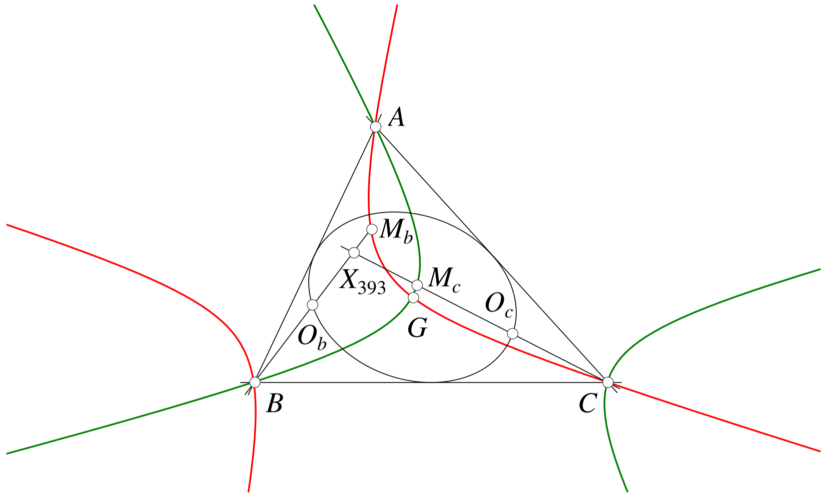


Cuando el punto P está, por ejemplo, sobre la hipérbola Γ_b, resulta que su polar trilineal es perpendicular a la recta CA y $\Gamma(P)$ degenera en la recta CA y su paralela por B, siendo ésta última el lugar geométrico de los puntos Q.



Para terminar, observamos algunas propiedades de los centros O_b y O_c de las hipérbolas Γ_b y Γ_c.

1. Por ser J_b y J_c puntos del infinito, los centros O_b y O_c de las hipérbolas están en la elipse inscrita de Steiner. En general si $J = (p : q : r)$ es infinito, la circuncónica con perspector J tiene su centro en el punto $J^2 = (p^2 : q^2 : r^2)$, que estará en la elipse inscrita de Steiner.



2. Las rectas BO_b y CO_c son cevianas del cuadrado baricéntrico del ortocentro, el punto X_{393}.

Otra visión de la cónica $\Gamma(P)$. Si U es el punto simétrico de A respecto del punto medio de B y C, y m es la perpendicular a ℓ por U, la cónica $\Gamma(P)$ es la conjugada isotómica de la recta m' conjugada armónica de m respecto de las rectas UB y UC. Esta recta m' es la tangente a $\Gamma(P)$ en U.