

Problema 717

a) En un triangle rectangle $\triangle OAB$ una recta r paral·lela a la hipotenusa talla els catets $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$ en els punts A' , B' , respectivament.

Determineu el lloc geomètric dels punts comuns a les rectes AB' i BA' que s'obtenen al variar dita recta paral·lela.

b) En un triangle rectangle $\triangle OAB$ una recta s perpendicular a la hipotenusa talla els catets $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$ en els punts A' , B' , respectivament.

Determineu el lloc geomètric dels punts comuns a les rectes AB' i BA' que s'obtenen al variar dita recta paral·lela.

a1) Determineu el lloc geomètric des punts comuns a les rectes AB' i BA' si $\triangle ABC$ és acutangle i r és paral·lela a $\overline{AB}$ i talla els costats $\overline{CB}$ i $\overline{CA}$ en els punts A' , B' , respectivament.

a2) Determineu el lloc geomètric des punts comuns a les rectes AB' i BA' si $\triangle ABC$ és obtusangle i r és paral·lela a $\overline{AB}$ i talla els costats $\overline{CB}$ i $\overline{CA}$ en els punts A' , B' , respectivament.

b1) Determineu el lloc geomètric des punts comuns a les rectes AB' i BA' si $\triangle ABC$ és acutangle i s és perpendicular a $\overline{AB}$ i talla els costats $\overline{CB}$ i $\overline{CA}$ en els punts A' , B' , respectivament.

b2) Determineu el lloc geomètric des punts comuns a les rectes AB' i BA' si $\triangle ABC$ és obtusangle en C i s és perpendicular a $\overline{AB}$ i talla els costats $\overline{CB}$ i $\overline{CA}$ en els punts A' , B' , respectivament.

c) En un triangle acutangle tracem una recta s perpendicular a $\overline{BC}$, que talla els costats $\overline{CB}$ i $\overline{CA}$ en els punts B' i A' , respectivament.
Determineu el lloc geomètric dels punts comuns a les rectes AB' i BA' que s'obtenen al variar dita perpendicular.

c1) En un triangle obtusangle en A tracem una recta s perpendicular a $\overline{BC}$, que talla els costats $\overline{CB}$ i $\overline{CA}$ en els punts B' i A' , respectivament.
Determineu el lloc geomètric dels punts comuns a les rectes AB' i BA' que s'obtenen al variar dita perpendicular.

a) En un triangle rectangle $\triangle OAB$ una recta r paral·lela a la hipotenusa talla els catets $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$ en els punts A' , B' , respectivament. Determineu el lloc geomètric dels punts comuns a les rectes AB' i BA' que s'obtenen al variar dita recta paral·lela.

Solució 1:

Siga P la intersecció de les rectes AB' i BA' .

Siga M el punt mig del segment $\overline{AB}$.

Siga N el punt mig del segment $\overline{A'B'}$.

Els triangles $\triangle APB$, $\triangle B'PA'$ estan en posició de Tales.

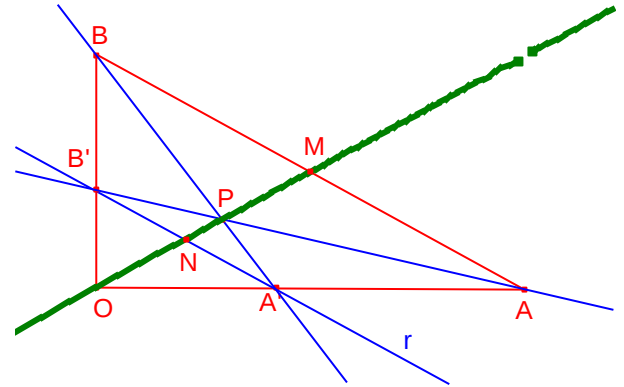
Són homotètics i P és el centre de l'homotècia.

M , N són homotètics. Aleshores M , N , P estan alineats.

Els triangles $\triangle OAB$, $\triangle OA'B'$ estan en posició de Tales.

M , N són homotètics. Aleshores M , N , O estan alineats.

Aleshores, P pertany a la mitjana $\overline{OM}$ del triangle $\triangle OAB$.



Solució 2:

Siga el triangle rectangle $\triangle OAB$ amb les següents coordenades:

$O(0, 0)$, $A(a, 0)$, $B(0, b)$.

Siga $A'(c, 0)$.

Aleshores, $B'\left(0, \frac{bc}{a}\right)$.

La recta que passa pels punts A' , B té equació:

$$r_{A'B} \equiv y = \frac{-b}{c}(x - c).$$

La recta que passa pels punts A , B' té equació:

$$r_{AB'} \equiv y = \frac{-bc}{a^2}(x - a).$$

Determinem la intersecció de les dues rectes resolent el sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{-b}{c}(x - c) \\ y = \frac{-bc}{a^2}(x - a) \end{cases} \cdot \begin{cases} x = \frac{ac}{a+c} \\ y = \frac{bc}{a+c} \end{cases} \quad \text{si } a \neq c.$$

Dividint ambdues expressions:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}, \quad y = \frac{b}{a}x, \quad \text{recta mitjana del triangle menys } x \neq a.$$

b) En un triangle rectangle $\triangle OAB$ una recta s perpendicular a la hipotenusa talla els catets $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$ en els punts A' , B' , respectivament. Determineu el lloc geomètric dels punts comuns a les rectes AB' i BA' que s'obtenen al variar dita recta paral·lela.

Solució 1:

Siga P la intersecció de les rectes AB' i BA' .

Siga M el punt mig del segment $\overline{AB}$.

Per ser el triangle rectangle M és el centre de la circumferència circumscrita al triangle.

Siga K un punt qualsevol de la hipotenusa.

Siga la recta s que passa per K i talla els catets $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$ en els punts A' , B' , respectivament.

Siga $\alpha = \angle BAO$.

$\angle BB'K = \alpha$.

Els triangles rectangles $\triangle OAB$, $\triangle OB'A'$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

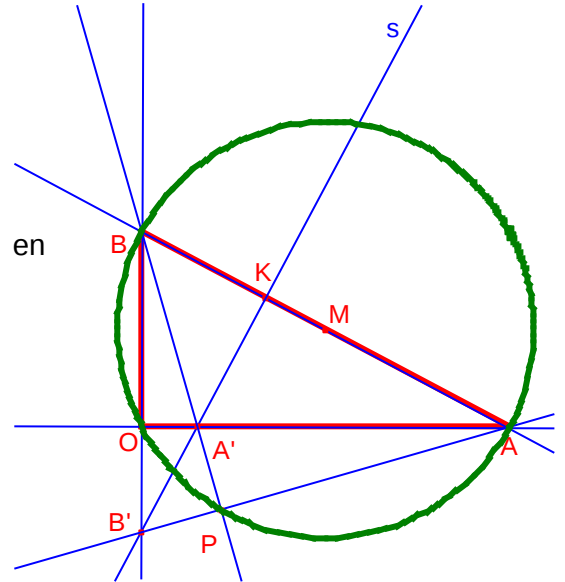
$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$, aleshores, els triangles rectangles $\triangle OB'A'$,

$\triangle OA'B$ són semblants.

Siga $\angle OBA' = \angle OAB' = \beta$. $\angle AA'P = 90^\circ - \beta$.

Aleshores, $\angle BPA = 90^\circ$.

Aleshores P pertany a la circumferència circumscrita al triangle $\triangle OAB$.



Solució 2:

Siga el triangle rectangle $\triangle OAB$ amb les següents coordenades:

$O(0, 0)$, $A(a, 0)$, $B(0, b)$.

Siga $A'(c, 0)$.

La recta que passa pels punts A' , K té equació:

$$r_{A'K} \equiv y = \frac{a}{b}(x - c).$$

Aleshores, $B' \left(0, \frac{-ac}{b} \right)$.

La recta que passa pels punts A , B' té equació: $r_{AB'} \equiv y = \frac{c}{b}(x - a)$.

La recta que passa pels punts A' , B té equació: $r_{A'B} \equiv y = \frac{-b}{c}(x - c)$.

Determinem la intersecció de les dues rectes resolent el sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{c}{b}(x - a) \\ y = \frac{-b}{c}(x - c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{c(b^2 + ac)}{b^2 + c^2} \\ y = \frac{-bc(a - c)}{b^2 + c^2} \end{cases}$$

Dividint ambdues expressions:

$$\frac{x}{y} = \frac{b^2 + ac}{-ab + bc}.$$

$$c = \frac{abx + b^2y}{bx - ay}. \text{ Substituint el valor de } c \text{ en la recta } r_{AB'} \equiv y = \frac{c}{b}(x - a):$$

$$y = \frac{abx + b^2y}{bx - ay} \cdot \frac{1}{b}(x - a). \text{ Simplificant:}$$

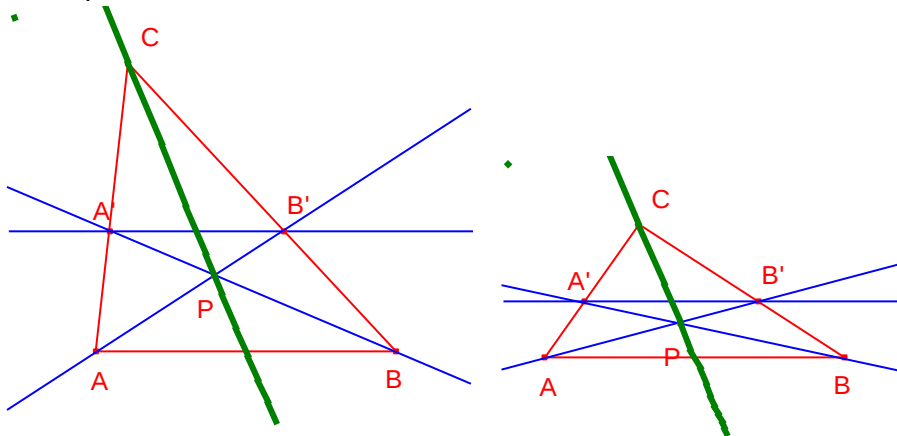
$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}, \quad x \neq a$$

El lloc geomètric és la circumferència circumscrita al triangle $\triangle OAB$ menys el punt simètric de O respecte del centre M..

a1) a2)

Solució:

En la solució 1 de l'apartat a) no em tingut en compte que el triangle fora rectangle, aleshores en tots dos casos el lloc geomètric és la recta mitjana del triangle $\triangle ABC$, corresponent al vèrtex C.



b1)

Siga el triangle acutangle $\triangle ABC$ amb les següents coordenades:

$A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $C(b, c)$. $b < a$, $b^2 + c^2 > ab$ (per ser acutangle).

Siga $K(d, 0)$.

La recta que passa pels punts A, C té equació:

$$r_{AC} \equiv y = \frac{c}{b} x.$$

Aleshores, $A' \left(d, \frac{cd}{b} \right)$.

La recta que passa pels punts B, C té equació:

$$r_{BC} \equiv y = \frac{c}{b-a} (x-a).$$

Aleshores, $B' \left(d, \frac{c(d-a)}{b-a} \right)$

La recta que passa pels punts A, B' té equació:

$$r_{AB'} \equiv y = \frac{c(d-a)}{d(b-a)} x.$$

La recta que passa pels punts A', B té equació: $r_{A'B} \equiv y = \frac{cd}{b(d-a)} (x-a)$.

Multiplicant ambdues expressions:

$$y^2 = \frac{c^2}{b(b-a)} x(x-a).$$

$$\frac{c^2}{b(a-b)} \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4} \frac{c^2}{b(a-b)}.$$

$$\frac{\left(x - \frac{a}{2} \right)^2}{\left(\frac{a}{2} \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{ac}{2\sqrt{b(a-b)}} \right)^2} = \frac{a^2}{4} \frac{c^2}{b(a-b)}, \quad \frac{a}{2} < \frac{ac}{2\sqrt{b(a-b)}}.$$

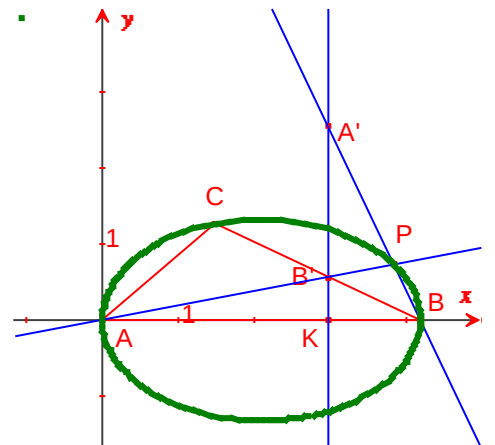
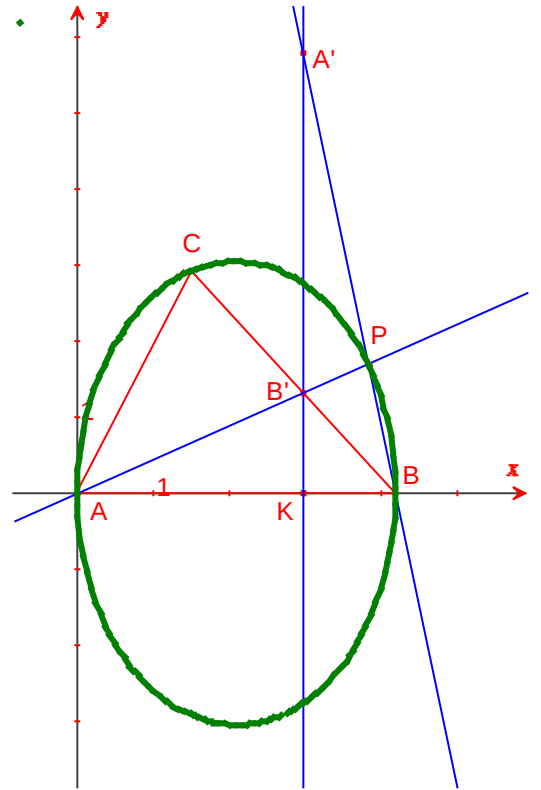
El lloc geomètric és una el·lipse imaginària

b2)

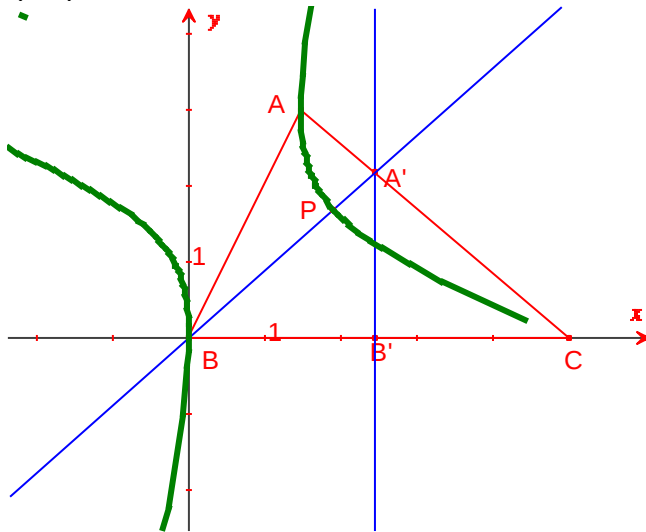
Anàlogament,

$$\frac{\left(x - \frac{a}{2} \right)^2}{\left(\frac{a}{2} \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{ac}{2\sqrt{b(a-b)}} \right)^2} = \frac{a^2}{4} \frac{c^2}{b(a-b)}, \quad \frac{a}{2} > \frac{ac}{2\sqrt{b(a-b)}}.$$

El lloc geomètric és una el·lipse real



c) c2)



Siga el triangle acutangle $\triangle ABC$ amb les següents coordenades:

$B(0, 0)$, $C(a, 0)$, $A(b, c)$. $b < a$ (si $\triangle ABC$ és acutangle o bé A és obtusangle)

Siga $B'(d, 0)$.

La recta que passa pels punts A, C té equació:

$$r_{AC} \equiv y = \frac{c}{b-a}(x-a).$$

Aleshores, $A' \left(d, \frac{c(d-a)}{b-a} \right)$.

La recta que passa pels punts A, B' té equació: $r_{AB'} \equiv y = \frac{c(d-a)}{d(b-a)}x$.

La recta que passa pels punts A', B té equació: $r_{A'B} \equiv y = \frac{c}{(b-d)}(x-d)$.

Aïllant d de les dues expressions:

$$d = \frac{acx}{(a-b)y - cx}, \quad d = \frac{cx - by}{c - y}.$$

Iguant les expressions:

$$\frac{acx}{(a-b)y - cx} = \frac{cx - by}{c - y}. \text{ Simplificant:}$$

$$c^2x^2 - b(a-b)y^2 + 2c(a-b)xy - acx = 0.$$

La matriu de la cònica és:

$$A = \begin{vmatrix} c^2 & c(a-b) & -\frac{ac}{2} \\ c(a-b) & -b(a-b) & 0 \\ -\frac{ac}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad A_{33} = \begin{pmatrix} c^2 & c(a-b) \\ c(a-b) & -b(a-b) \end{pmatrix}$$

$$|A| = -\left(\frac{ac}{2}\right)^2 b(a-b) \neq 0. \quad |A_{33}| = -bc^2(a-b) - c^2(a-b)^2 < 0.$$

La cònica és una hipèrbola.