***Problema* 717.-** *a) En un triángulo rectángulo OAB una recta r paralela a la hipotenusa corta a los catetos OA y OB en los puntos A’ y B’ respectivamente.*

Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB’ y BA’ que se obtiene al variar dicha paralela.

Martínez, J. (1969): Elementos de Matemáticas. (p. 530).

Propuesta complementaria.

b) En un triángulo rectángulo OAB una recta s perpendicular a la hipotenusa corta a los catetos OA y OB en los puntos A’ y B’ respectivamente.

Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB’ y BA’ que se obtienen al variar dicha perpendicular.

a_1) Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB’ y BA’ si ABC es acutángulo, y r es paralela a AB, cortando a los lados CB y CA en los puntos A’ y B’ respectivamente.

a_2) Hallar el lugar de los puntos comunes a las rectas AB’ y BA’ si ABC es obtusángulo, y r es paralela a AB, cortando a los lados CB y CA en los puntos A’ y B’ respectivamente.

b_1) En un triángulo acutángulo CAB una recta s perpendicular a AB corta a los lados CB y CA en los puntos B’ y A’ respectivamente.

Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB’ y BA’ que se obtienen al variar dicha perpendicular.

b_2) En un triángulo obtusángulo en C, CAB, una recta s perpendicular a AB corta a los lados CB y CA en los puntos B’ y A’ respectivamente.

Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB’ y BA’ que se obtienen al variar dicha perpendicular.

c) En un triángulo acutángulo trazamos una recta s perpendicular a BC, que corta a los lados CB y CA en los puntos B’ y A’ respectivamente.

Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB’ y BA’ que se obtienen al variar dicha perpendicular.

c_1) En un triángulo obtusángulo en A, trazamos una recta s perpendicular a BC, que corta a los lados CB y CA en los puntos B’ y A’ respectivamente.

Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a las rectas AB’ y BA’ que se obtienen al variar dicha perpendicular.

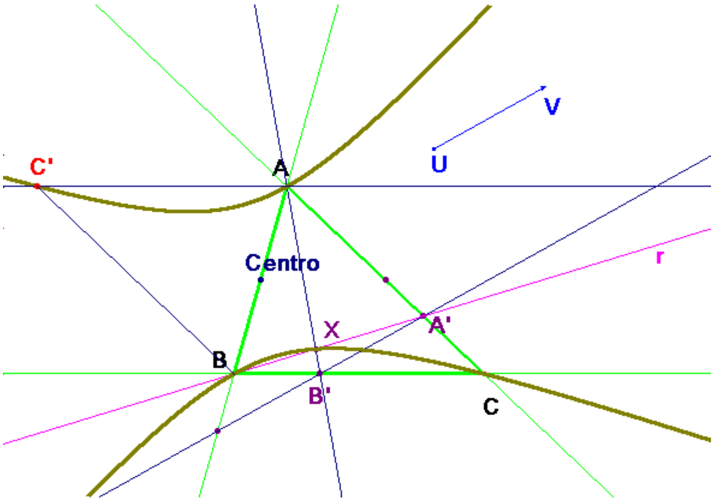
Barroso, R (2014): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Vamos a intentar dar una visión global de todas estas situaciones particulares. Trazar una perpendicular a AB es trazar una recta paralela a la dirección de la altura desde C.

En general vamos a suponer que se trazan, por los puntos de AB, paralelas a una determinada dirección dada, por un vector UV del plano. Cada una de ellas corta a CA en A' y a CB en B'. A su vez, las rectas AB' y BA' se cortan en X. Tenemos que ver qué lugar geométrico describe X cuando varían estas paralelas.

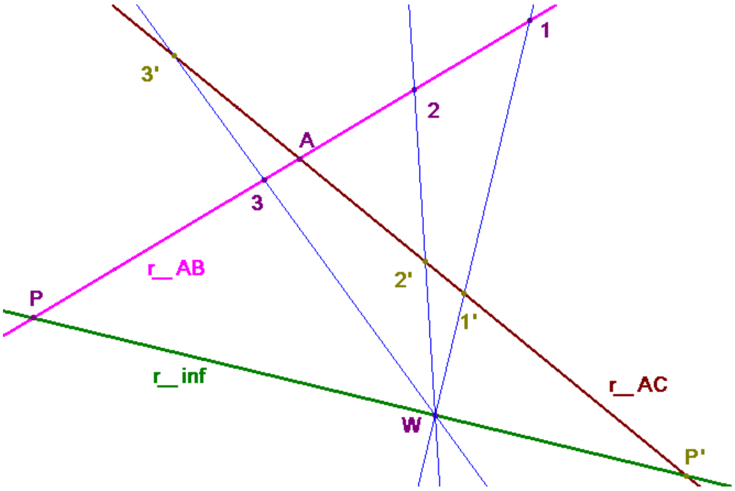
La aplicación que hace corresponder a la recta AB' del haz de las que pasan por A, la recta BA' de las que pasan por B, es claramente proyectiva: el conjunto de los puntos de intersección de los pares homólogos es una cónica, que pasa por los vértices de los haces, puntos A y B.



Para la recta que pasa por C, paralela al vector UV, los puntos A' y B' se confunden con el vértice, siendo así que éste es un punto de la cónica.

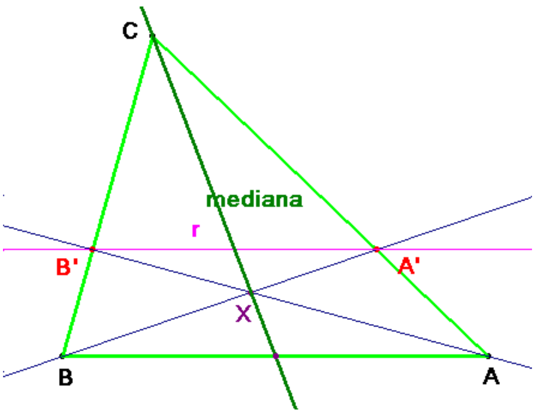
Se trata pues, de una cónica circunscrita al triángulo ABC.

Otro punto de esta cónica es C', el simétrico de C respecto del punto medio de AB. En efecto:



Cuando se toma el punto del infinito de AB, la proyección en CA (respectivamente en CB) según el vector UV es el punto del infinito de CA (de CB). Por consiguiente BA' es la paralela a CA por B (AB' es la paralela a CB por A). La intersección de estas rectas es C', el simétrico de C respecto del punto medio de AB.

Una cónica que pasa por los vértices de un paralelogramo es una cónica con centro: el del paralelogramo. No puede, pues, tratarse de una parábola en ningún caso.



Además, toda cónica del haz por los puntos del cuadrivértice $ABCC'$ puede interpretarse como obtenida por proyecciones paralelas a una dirección como se ha descrito antes. Para un punto X del plano, distinto de los 4 que generan el haz, las rectas AX y BX definen los puntos A' y B' sobre CA y CB. El vector $A'B'$ es la dirección que define la cónica. Cuando la dirección UV es paralela al lado AB la cónica degenera en el producto de dos rectas: la mediana desde C y el lado AB.

Según vimos en el problema 68 de esta revista (Diciembre de 2002) el punto de intersección de AB' con BA' es un punto de la mediana desde C, por tanto, esta mediana es el lugar geométrico pedido. Esto es independiente del tipo de triángulo que se tenga, y así quedan resueltos los apartados a), a_1) y a_2).

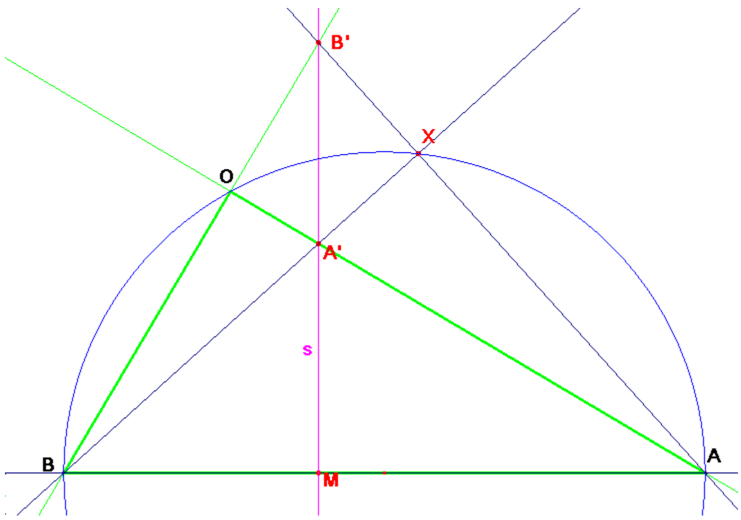
b) En el triángulo $BB'A$ las rectas $AA' = AO$ y $s = B'A'$ son alturas, por tanto la recta BA' es la otra altura y el punto X de intersección de BA' con AB' es el pie de la misma en AB'. Los puntos de intersección son puntos desde los cuales se ve el segmento BA bajo ángulo de 90º. Ese lugar es la circunferencia circunscrita a OAB.

b1 y b2) Para ver cómo es el lugar geométrico cuando el triángulo no es rectángulo recurriremos a las coordenadas. Ya sabemos que se trata de una cónica circunscrita al triángulo, pero queremos saber más sobre ella.

Tomando coordenadas baricéntricas relativas al triángulo ABC, la cónica circunscrita y con centro en el punto medio de AB (de coordenadas (1:1:0)) es la de ecuación

$$pyz + qzx + (p+q)xy = 0 \qquad (1)$$

La recta del infinito tiene ecuación $x + y + z = 0$, por tanto los puntos del infinito de esta cónica, verifican :



$$qx^2 + py^2 = 0.$$

El punto del infinito de la perpendicular al lado AB ($z = 0$) es $(S_B : S_A : -c^2)$, donde $S_A = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2}$ y expresiones similares para S_B y S_C.

La mediatriz de AB es

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ S_B & S_A & -c^2 \end{vmatrix} = 0$$

Corta a los lados CA y CB en $A' = (S_A - S_B : 0 : c^2)$ y $B' = (0 : S_A - S_B : -c^2)$ respectivamente.

Obtendremos un nuevo punto de la cónica de la intersección de las rectas AB' y BA'. Estas rectas son las de ecuaciones respectivas $c^2y + (S_A - S_B)z = 0$ y $c^2x - (S_A - S_B)z = 0$. El punto que tienen en común es $X = (S_A - S_B : S_B - S_A : c^2)$.

Haciendo que la ecuación (1) contenga X resulta,

$$S_B yz + S_A zx + c^2 xy = 0 \qquad (2)$$

Sus ejes son $z = 0$ y la mediatriz de AB: basta ver que el polo de la primera es el punto del infinito de la segunda y viceversa.

Para saber qué tipo de cónica es estudiamos los puntos del infinito de la misma.

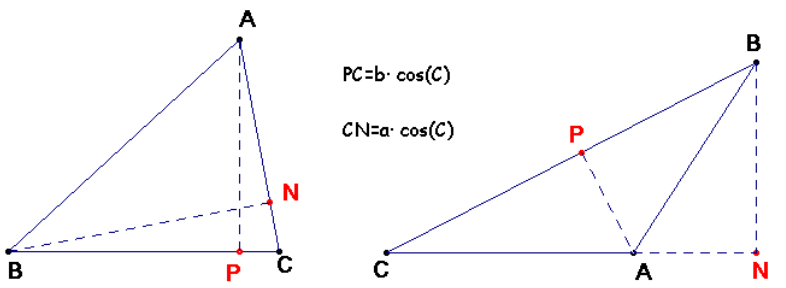
Son las soluciones de

$$S_A x^2 + S_B y^2 = 0 \qquad (3)$$

Sustituyendo en (3) S_A y S_B en función de los lados y sustituyendo c con el teorema del coseno, ($c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$) queda

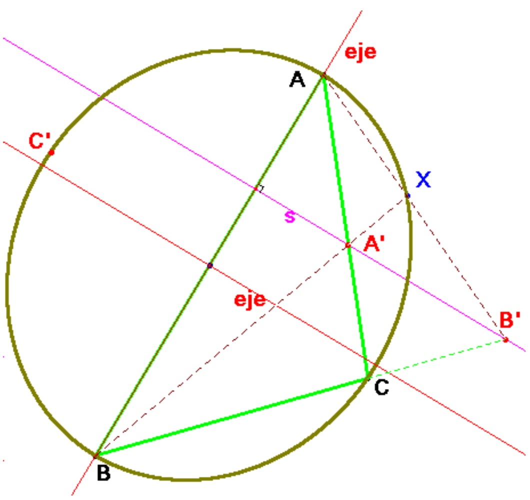
$$b(b - a \cdot \cos C)x^2 + a(a - b \cdot \cos C\,)y^2 = 0 \qquad (4)$$

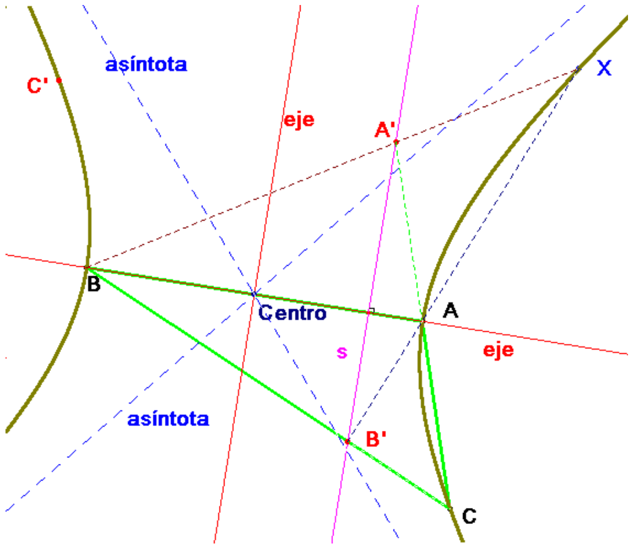
La ecuación (4) no tiene soluciones reales si el ángulo C es obtuso o bien si el triángulo es acutángulo, en cuyo caso los coeficientes son ambos positivos: No hay puntos en el infinito y se trata de una elipse (o circunferencia).



Si el triángulo es obtusángulo en A (o bien en B), el coeficiente de x^2 es negativo y el de y^2 positivo. Hay dos puntos en el infinito y la cónica es una hipérbola.

Podemos resumir ambos casos diciendo que, **cuando se trazan perpendiculares al lado BC, la cónica circunscrita al triángulo es una elipse, excepto cuando el triángulo es obtusángulo en A o en B.**





La elipse es una circunferencia si el triángulo es rectángulo en C.

c y c_1) Finalmente, trazar perpendiculares a BC equivale a trazar rectas que forman un determinado ángulo fijo con AB. Estamos en el caso general: se obtiene una cónica circunscrita al triángulo. Pero veamos más detalladamente.

Tomo la mediatriz de BC (o sea, tomo $B' = (0\!:\!1\!:\!1)$). El punto del infinito de ella es $(-a^2\!:\!S_C\!:\!S_B)$, por tanto su ecuación es $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ -a^2 & S_C & S_B \end{vmatrix} = 0$. Corta al lado CA ($y = 0$) en el punto $A' = (-a^2 : 0 : S_B - S_C)$. Las rectas AB' $(y - z = 0)$ y $A'B$ $\left((S_B - S_C)x + a^2 z = 0\right)$ se cortan en $X(-a^2 : S_B - S_C : S_B - S_C)$.

Este es el quinto punto que nos permite determinar en (1) la ecuación de la cónica circunscrita.

Sustituyendo se tiene finalmente:

$$2a^2yz + (S_B - S_C - a^2)zx + (S_B - S_C + a^2)xy = 0 \quad (5)$$

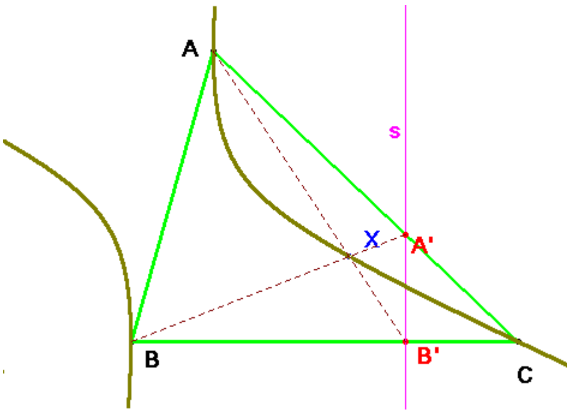
La ecuación de los puntos del infinito es

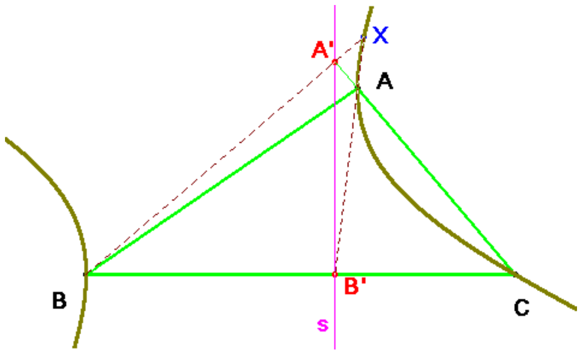
$$(S_B - S_C - a^2)x^2 + 2a^2y^2 = 0$$

o bien, expresando los coeficientes en función de b y c, gracias al teorema del coseno

$$a^2y^2 - b(b - c \cdot \cos A)x^2 = 0 \quad (6)$$

Si el triángulo es acutángulo, la proyección de un lado sobre otro es menor que éste, y la ecuación (6) tiene dos soluciones reales, y si es obtusángulo en A también, por ser negativo $\cos A$ (también si es rectángulo). **En resumen: siempre se tiene una hipérbola.**





■