

Problema 711

En un triángulo ABC rectángulo en A, tenemos AE altura tal que EB=1. Sobre AB tenemos D tal que CD=DB=1. Hallar AD.

Honsberger, R. (2003) Mathematical Diamonds. MAA

Solución de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo

Sea $c=AB$.

Por los teoremas de la altura en ABC y de Pitágoras en ABE,

$$EC=EB \cdot EC=AE^2=AB^2-BE^2=c^2-1.$$

Según el teorema de Pitágoras en ADC,

$$AC^2=DC^2-AD^2=DC^2-(AB-DB)^2=1^2-(c-1)^2=2c-c^2.$$

Por el teorema de Pitágoras en ABC,

$$c^4=(1+c^2-1)^2=(BE+EC)^2=BC^2=AB^2+AC^2=c^2+2c-c^2=2c, \text{ o sea, } c(c^3-2)=0,$$

luego $c=\sqrt[3]{2}$ y, por tanto, $AD=AB-DB=c-1=\sqrt[3]{2}-1$.