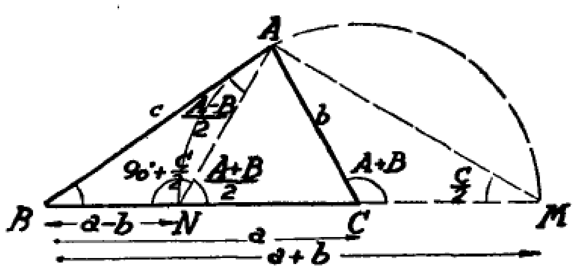
En el triángulo $ABC$ (fig.) supongamos $a>b$ y llevemos $b$ sobre $a$ y sobre su prolongación a partir de $C$; obtenemos así los puntos $N$ y $M$, y el triángulo rectángulo $ANM$ cuyos ángulos agudos vamos a calcular.

Se tiene $\sphericalangle ACM = A + B$ (exterior de $\Delta ABC$); $\sphericalangle ANM = \frac{1}{2}(A+B)$ (inscrito mitad del central $ACM$); $AMC = \frac{1}{2}C$ (por análoga razón); $\sphericalangle BAN = \sphericalangle ANC - \sphericalangle B = \frac{1}{2}(A-B)$

Finalmente, $\sphericalangle ANB = 90^\circ + \frac{1}{2}C$ (exterior de $\Delta ANM$).




Aplicando el teorema de los senos a los triángulos $ABM$ y $ABN$ resulta

Analogías de Mollweide

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\operatorname{sen}\left[90^\circ + \frac{1}{2}(A-B)\right]}{\operatorname{sen}\dfrac{C}{2}} = \frac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{C}{2}} \qquad [3]$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\left[90^\circ + \frac{1}{2}C\right]} = \frac{\operatorname{sen}\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}} \qquad [4]$$

Dividiéndolas resulta

$$\boxed{\frac{a-b}{a+b} = \operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}} \qquad [5]$$

y por ser $\frac{1}{2}C = 90^\circ - \frac{1}{2}(A+B)$, se puede escribir en forma más simétrica y de recordar, sustituyendo $\cot\frac{1}{2}(A+B)$ por $1 : \operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)$.

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}} \qquad \text{Analogía de Neper (*)} \qquad [6]$$

fórmula que puede enunciarse así:

TEOREMA DE LAS TANGENTES.—*La diferencia de los lados es a su suma, como la tangente de la semidiferencia de los ángulos opuestos es a la tangente de la semisuma.*